VERALLGEMEINERTE HOMOTOPIE-HOMOMORPHISMEN
UND
KLASSIFIZIERENDE RÄUME

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
vorgelegt von

MARTIN FUCHS

aus Bonn

Saarbrücken 1964.

Tag der mündlichen Prüfung: 9. 4. 1964.

Der Dekan: Prof. Dr. de Lattin.

Berichterstatter: Prof. Dr. D. Puppe, Saarbrücken

Prof. Dr. A. Dold, Heidelberg,

Prof. Dr. E. Lamprecht, Saarbrücken.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Zu jedem H-Raum (vgl. Definition 5.1) konstruieren Dold und Lashof in [2] eine universelle Prinzipalfaserung. Diese Konstruktion induziert einen Funktor D in die Kategorie $\mathcal{T}$ der bogenzusammenhängenden topologischen Räume mit nicht ausgeartetem Grundpunkt und Homotopieklassen grundpunkttreuer Abbildungen. Wählt man als Ausgangskategorie dieses Funktors die Kategorie der H-Räume und Homotopieklassen von Homomorphismen $\mathcal{O}$ so hat dieser Funktor keine befriedigend schönen Eigenschaften. Betrachtet man z.B. den von der Konstruktion des Schleifenraumes induzierten Funktor $\Omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{O}$, so ist, bei Beschränkung unserer Objekte auf solche vom Homotopietyp eines abzählbaren CW-Komplexes, zwar $D\Omega \sim 1_{\mathcal{T}}$, aber nicht $\Omega D \sim 1_{\mathcal{O}}$, ja D ist für die Morphismen nicht einmal injektiv.

Wir faktorisieren D indem wir eine neue Kategorie $\mathcal{H}$ einführen, welche dieselben Objekte wie $\mathcal{O}$ besitzt, aber andere Morphismen, sogenannte H-Morphismen. Die Dold-Lashof Konstuktion induziert den Funktor $B: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{T}$, außerdem gibt es einen Funktor $J: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{H}$, welcher auf den Objekten die Identität ist. Es gilt $D = BJ$ und $J\Omega B \sim 1_{\mathcal{H}}$. B ist also ein bijektiver Funktor.

In den ersten vier Abschnitten dieser Arbeit befassen wir uns mit der Definition und formalen Eigenschaften der H-Morphismen. Sie werden mit Hilfe von H-Homomorphismen (Definition 1.2) definiert (vgl. 3.1 ff.), die eine Verallgemeinerung der Samelson'schen Homomorphismen bis auf Homo-

topie darstellen (vgl. [8]). Im vierten Abschnitt wird eine einfache Charakterisierung der Isomorphismen von $\mathcal{H}$ hergeleitet.

In den Abschnitten fünf bis sieben beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von Dold-Lashof. Im Abschnitt fünf zeigen wir, daß diese Konstruktion den Funktor $B:\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{T}$ induziert, im Abschnitt sechs konstruiren wir einen natürlichen H-Morphismus von H nach $\Omega(B_H, b_o)$ und im Abschnitt sieben kommen wir zu den bereits erwähnten Funktoräquivalenzen.

In einem Anhang werden noch einige Beweise nachgetragen. Eigentlich müßten diese Untersuchungen für homotopieassoziative H-Räume durchgeführt werden. Die Kompliziertheit dieser Untersuchungen ließ es jedoch geraten erscheinen, zuerst einmal assoziative H-Räume zu betrachten, entsprechend der Einschränkung von J. Stasheff in seiner Thesis: Homotopy Associativity of H-Spaces [10] auf Homomorphismen.

Das Beispiel 7.9 verdanke ich W. BROWDER, ein weiteres Beispiel (7.10), viele anregende und kritische Ratschläge und überhaupt den Anstoß zu dieser Arbeit verdanke ich D. PUPPE.

1. H Homomorphismen.

1.1 Ein schwacher H-Homomorphismus (in der Literatur als H-Homomorphismus bekannt) ist eine Abbildung g_o eines H-Raumes H in einen H-Raum $\bar{H}$ so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H\times H & \xrightarrow{\mu} & H \\ {\scriptstyle g_o\times g_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_o} \\ \bar{H}\times\bar{H} & \xrightarrow[\bar{\mu}]{} & \bar{H} \end{array} \qquad (0)$$

kommutativ ist bis auf Homotopie (μ und $\bar{\mu}$ bezeichnen die Multiplikationen von H bzw. $\bar{H}$). Mit anderen Worten, ein schwacher H-Homomorphismus ist eine Folge von 2 Abbildungen (g_o, g_1):

g_o: $H \longrightarrow \bar{H}$, g_1: $H\times I\times H \longrightarrow \bar{H}$

so, daß die Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} H\times H & \xrightarrow{g_o\times g_o} & \bar{H}\times\bar{H} \\ \downarrow{\scriptstyle v_1^{1,o}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}} \\ H\times I\times H & \xrightarrow[g_1]{} & \bar{H} \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{ccc} H\times H & \xrightarrow{\mu} & H \\ \downarrow{\scriptstyle v_1^{1,1}} & & \downarrow{\scriptstyle g_o} \\ H\times I\times H & \xrightarrow[g_1]{} & \bar{H} \end{array}$$

kommutativ sind ($v_1^{1,o}$, $v_1^{1,1}$ vgl. 1.2).

Für assoziative H-Räume läßt sich die Folge der Abbildungen (und der Bedingungen) vergrößern. Die folgenden Bezeichnungen sind zweckmäßig:

Sei $H(0) = H$ und $H(n) = (H\times I)^n \times H$, $n = 1,2,\ldots$, wobei $(H\times I)^n = (H\times I)^{n-1}\times(H\times I)$ und $(H\times I)^1 = H\times I$, $n = 2,3,\ldots$ Ist $\mu : H\times H \longrightarrow H$ die Multiplikation von H, so führen

wir Abbildungen $\mu_i^n : H(i-1) \times H(n-i) \longrightarrow H(n-1)$, $1 \leq i \leq n$, ein: für $1 < i < n$ setzen wir $\mu_i^n := id_{H(i-2)\times I} \times \mu \times id_{I \times H(n-i-1)}$ (man betrachte das Diagramm:

$$
\begin{array}{ccccccc}
H(i-1)\times H(n-i) & = & H(i-2)\times I & \times H & \times H & \times I & \times H(n-i-1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mu_i^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id} & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id} & \\
H(n-1) & = & H(i-2)\times I & \times H & \times I & \times H(n-i-1) &
\end{array}
\qquad (1)
$$

),

für $i = 1$ und n definiert man μ_i^n in entsprechender Weise.

1.2 Definition: Seien $H, \overline{H}$ assoziative H-Räume. Ein H-Homomorphismus $h: H \longrightarrow \overline{H}$ ist eine Folge von Abbildungen

$$h_n: H(n) \longrightarrow \overline{H},\ n = 0,1,2,\ldots,$$

so, daß die Diagramme

$$
\begin{array}{ccc}
H(i-1)\times H(n-i) & \xrightarrow{h_{i-1}\times h_{n-i}} & \overline{H}\times\overline{H} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle v_i^{n,0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{\mu}} \\
H(n) & \xrightarrow[h_n]{} & \overline{H}
\end{array}
\qquad (2)
$$

$$
\begin{array}{ccc}
H(i-1)\times H(n-i) & \xrightarrow[\mu_i^n]{} & H(n-1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle v_i^{n,1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_{n-1}} \\
H(n) & \xrightarrow[h_n]{} & \overline{H}
\end{array}
\qquad (3)
$$

kommutativ sind, ($n = 0,1,2,\ldots; i = 1,2,\ldots,n$;

$v_i^{n,t}(x_0, t_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, t_n, x_n) := (x_0, t_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, t_n, x_n)$, $t \in I$).

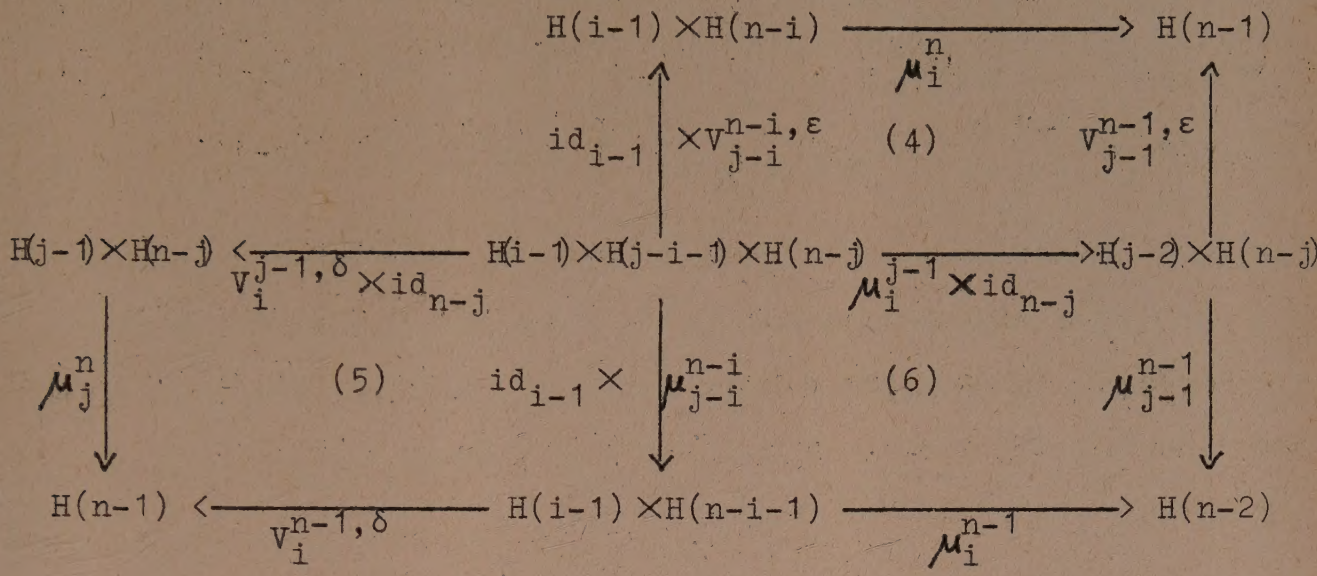
Die durch (2) und (3) beschriebenen Bedingungen nennen wir die Vertauschungsregeln für H-Homomorphismen.

1.3 Lemma: Durch die Vertauschungsregeln ist h_n auf einem zu $H^{n+1} \times \dot{I}^n$ homöomorphen Teilraum $\delta H(n)$ von $H(n)$ festgelegt durch die Abbildungen h_i ($i < n$), μ und $\overline{\mu}$.

Beweis: $\delta H(n) := \bigcup_{i=1}^{n} H(i-1) \times \dot{I} \times H(n-i)$. Es genügt offenbar, wenn wir alle Teilräume von der Gestalt

$$
\left.
\begin{array}{l}
v_j^{n,\delta}(v_i^{j-1,\varepsilon} \times id_{n-j})(H(i-1)\times H(j-i-1)\times H(n-j)) = \\
= v_i^{n,\varepsilon}(id_{i-1} \times v_{j-i}^{n-i,\delta})(H(i-1)\times H(j-i-1)\times H(n-j))
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
i < j, \\
\delta,\varepsilon = 0,1,
\end{array}
$$

betrachten und dafür die folgenden Identitäten aufstellen. (Wir schreiben für $id_{H(n)}$ kurz id_n). Das Diagramm



ist kommutativ. (Bei (6) wird die Assoziativität der Multiplikation von H ausgenutzt.) Damit wird für $i < j$ und $\delta = \varepsilon = 0$:

$$h_n \circ V_i^{n,o} \circ (id_{i-1} \times V_{j-i}^{n-i,o}) \underset{(2)}{=} \bar{\mu}(h_{i-1} \times \bar{\mu}(h_{j-i-1} \times h_{n-j}) =$$

$$= \bar{\mu}(\bar{\mu}(h_{i-1} \times h_{j-i-1}) \times h_{n-j}) \underset{(2)}{=} h_n V_j^{n,o} (V_i^{j-1,o} \times id_{n-j}).$$

Für $i < j$ und $\delta = \varepsilon = 1$ wird:

$$h_n V_i^{n,1} (id_{i-1} \times V_{j-i}^{n-i,1}) \underset{(3)}{=} h_{n-1} \mu_i^n (id_{i-1} \times V_{j-i}^{n-i,1}) \underset{(4)}{=}$$

$$= h_{n-1} V_{j-1}^{n-1,1} (\mu_i^{j-1} \times id_{n-j}) \underset{(3)}{=} h_{n-2} \mu_{j-1}^{n-1} (\mu_i^{j-1} \times id_{n-j}) \underset{(6)}{=}$$

$$= h_{n-2} \mu_i^{n-1} (id_{i-1} \times \mu_{j-i}^{n-i}) \underset{(3)}{=} h_{n-1} V_i^{n-1,1} (id_{i-1} \times \mu_{j-i}^{n-i}) \underset{(5)}{=}$$

$$= h_{n-1} \mu_j^n (V_i^{j-1,1} \times id_{n-j}) \underset{(3)}{=} h_n V_j^{n,1} (V_i^{j-1,1} \times id_{n-j}).$$

Für $i < j$ und $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$ wird:

$$h_n V_i^{n,1} (id_{i-1} \times V_{j-i}^{n-i,o}) \underset{(3)}{=} h_{n-1} \mu_i^n (id_{i-1} \times V_{j-i}^{n-i,o}) \underset{(4)}{=}$$

$$= h_{n-1} V_{j-1}^{n-1,o} (\mu_i^{j-1} \times id_{n-j}) \underset{(2)}{=} \bar{\mu}(h_{j-2} \mu_i^{j-1} \times h_{n-j}) \underset{(3)}{=}$$

$$= \bar{\mu}(h_{j-1} V_i^{j-1,1} \times h_{n-j}) \underset{(2)}{=} h_n V_j^{n,o} (V_i^{j-1,1} \times id_{n-j}).$$

Für $i < j$ und $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$ wird:

$$h_n\, v_i^{n,o}\,(id_{i-1} \times v_{j-i}^{n-i,1}) \underset{(2)}{=} \bar{\mu}(h_{i-1} \times h_{n-i})\,(id_{i-1} \times v_{j-i}^{n-i,1}) \underset{(3)}{=}$$
$$= \bar{\mu}(h_{i-1} \times h_{n-i-1}\mu_{j-1}^{n-i}) \underset{(2)}{=} h_{n-1}\, v_i^{n-1,o}\,(id_{i-1} \times \mu_{j-1}^{n-i}) \underset{(5)}{=}$$
$$= h_{n-1}\mu_j^n\,(v_i^{j-1,o} \times id_{n-j}) \underset{(3)}{=} h_n\, v_j^{n,1}\,(v_i^{j-1,o} \times id_{n-j}).$$

1.4 Jede Abbildung $h_n (n > 0)$ löst also ein Erweiterungsproblem, das mit Hilfe der Abbildungen h_i $(i < n)$, μ und $\bar{\mu}$ formuliert werden kann. Eine solche Lösung existiert nicht immer (vgl. 7.9) und wenn sie existiert, so ist sie nicht immer eindeutig festgelegt (vgl. 3.7 und 7.10).

2. Zusammensetzen von H-Homomorphismen und ein Beispiel.

2.1. Zuerst wollen wir eine Abbildung der Homomorphismen von H nach $\overline{H}$ (H und $\overline{H}$ assoziative H-Räume) in die H-Homomorphismen von H nach $\overline{H}$ angeben. Zur Vorbereitung dient die

Definition: Ist H ein assoziativer H-Raum, so gibt es einen H-Homomorphismus e von H nach H mit $e_o = id_H$:

$e_o := id_H$, $e_n(x_o,t_1,\ldots,t_n,x_n) := x_o x_1 \cdots x_n$ für alle $n \geq 1$, $x_o, x_i \in H$, $t_i \in I$, $i = 1,\ldots,n$.

Wegen der Assoziativität der Multiplikation von H ist $e = (e_n)$ ein H-Homomorphismus.

Sind H, $\overline{H}$ assoziative H-Räume und ist $\varphi: H \longrightarrow \overline{H}$ ein Homomorphismus, so wollen wir den durch $f_o := \varphi$, $f_n := \varphi e_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ definierten H-Homomorphismus f den zu φ gehörigen H-Homomorphismus nennen.

Bemerkung: Es kann noch weitere H-Homomorphismen $\tilde{f}$ geben mit $\tilde{f}_o = \varphi$, wie ein Beispiel in Abschnitt 3 zeigen wird. Diese 'gehören' dann nicht zu φ.

2.2. Sind F, G, H assoziative H-Räume und sind $f: F \longrightarrow G$, $g: G \longrightarrow H$ H-Homomorphismen, so können wir mit Hilfe von f und g einen H-Homomorphismus $h: F \longrightarrow H$ sehr einfach konstruieren, wenn f oder g zu einem Homomorphismus gehören:

a.) g gehört zu ψ: wir definieren $h_n := \psi f_n$,

b.) f gehört zu φ: wir definieren $h_n(x_o,t_1,\ldots,t_n,x_n) :=$
$= g_n(\varphi(x_o),t_1,\ldots,t_n,\varphi(x_n))$, wobei $x_o, x_i \in F$, $t_i \in I$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir auch für beliebige f und g

einen H-Homomorphismus gf: F ——> H definieren:

c.) $(gf)_o := g_o f_o$,

$$(gf)_n(x_o,t_1,\ldots,t_n,x_n) := g_j(f_{i_1}(x_o,2t_1-1,\ldots,2t_{i_1}-1,x_{i_1}),\ 2t_{i_1+1},\ \ldots,2t_{i_1+1},f_{n-i_j-1}(x_{i_j+1},\ldots,2t_n-1,x_n)).$$

Dabei ist $n > 0$, $x_i \in F$, $(i = 0,\ldots,n)$; $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j < n$ $(j = 0,\ldots,n)$ ist irgendeine Folge natürlicher Zahlen, bestimmt dadurch, daß $t_{i_1+1},\ldots,t_{i_j+1} \in [0,\frac{1}{2}]$ und $t_i \in [\frac{1}{2},1]$ sonst.

$(gf)_n$ ist also zunächst auf abgeschlossenen Teilmengen von F(n) definiert, die F(n) überdecken. Daß die Definition auf den Durchschnitten dieser Teilmengen eindeutig ist, folgt aus den Vertauschungsregeln (2) und (3). Daß $gf = ((gf)_n)$ ein H-Homomorphismus von F nach H ist, folgt aus den gleichen Regeln.

2.3 Bemerkung: Die Verknüpfungsvorschriften von 2.2a.) und b.) stimmen nicht mit der in c.) angegebenen überein. Beide Verknüpfungen sind jedoch in betimmter Weise homotop.
Die Verknüpfungsvorschrift von c.) ist nicht assoziativ, jedoch assoziativ bis auf eine bestimmte Art von Homotopie. Man sieht: die H-Homomorphismen bilden zusammen mit den assoziativen H-Räumen keine Kategorie; um zu einer Kategorie zu kommen werden wir in Abschnitt 3 Homotopieklassen von H-Homomorphismen betrachten.

2.4 Zuvor jedoch ein Beispiel für nicht triviale H-Homomorphismen:

Seien K und L lokalkompakte Hausdorffräume und L dominiere K (bzw. K und L seien vom gleichen Homotopietyp), d.h. es gibt Abbildungen $r: K \rightleftarrows L : s$ und

$R: K \times I \longrightarrow K$ (und $S: L \times I \longrightarrow L$)

mit (und mit

$R(k,o) = s\,r(k)$ $S(l,o) = r\,s(l)$

$R(k,1) = k$ $S(l,1) = l$).

Seien H, $\bar{H}$ die Räume der stetigen Abbildungen von K nach K bzw. L nach L (Homotopieäquivalenzen von K bzw. L) mit der kompakt-offen Topologie. Das Hintereinanderschalten von Abbildungen definiert eine stetige, assoziative Multiplikation mit Neutralelement in H und $\bar{H}$:

$$\mu(x_1,x_2) = x_2 \circ x_1, \qquad \bar{\mu}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \bar{x}_2 \circ \bar{x}_1,$$

dabei sind x_i: K ⟶ K, $\bar{x}_i$: L ⟶ L (i = 1,2) stetige Abbildungen (Homotopieäquivalenzen).

Behauptung : R, r und s induzieren einen H-Homomorphismus f: H ⟶ $\bar{H}$.

Beweis. Setze $f_o(x_o) = r \circ x_o \circ s$, $x_o \in H$, dann ist $f_o(x_o) \in \bar{H}$. Ferner sei $f_n(x_o,t_1,\ldots,t_n,x_n) = r \circ x_n \circ \tilde{R}(t_n) \circ \ldots \circ \tilde{R}(t_1) \circ x_o \circ s$. $\tilde{R}$: I ⟶ H ist die durch R: K×I ⟶ K eineindeutig bestimmte Abbildung (vgl. Bourbaki, Topologie Generale, Chap. X, 2 Prop. 9). Die so definierte Folge (f_n) ist ein H-Homomorphismus:

a.) $f_n \circ V_i^{n,o}(x_o,t_1,\ldots,x_{i-1},x_i,\ldots,t_n,x_n) =$

$= r \circ x_n \circ \tilde{R}(t_n) \circ \ldots \circ x_i \circ s \circ r \circ x_{i-1} \circ \ldots \circ \tilde{R}(t_1) \circ x_o \circ s =$

$= \bar{\mu}(f_{n-i} \times f_{i-1})(x_o,t_1,\ldots,x_{i-1},x_i,\ldots,t_n,x_n)$, da $\tilde{R}(0) = s \circ r$.

b.) $f_n \circ V_i^{n,1}(x_o,t_1,\ldots,x_{i-1},x_i,\ldots,t_n,x_n) =$

$= r \circ x_n \circ \tilde{R}(t_n) \circ \ldots \circ x_i \circ id_K \circ x_{i-1} \circ \ldots \circ \tilde{R}(t_1) \circ x_o \circ s =$

$= f_{n-1} \circ \mu_i^n(x_o,t_1,\ldots,x_{i-1},x_i,\ldots,t_n,x_n)$, da $\tilde{R}(1) = id_K$.

2.5 Hat man einen weiteren lokalkompakten Hausdorffraum M und Abbildungen u: L ⟷ M : v mit einer Homotopie T von v∘u zur Identität von L, so ist ein H-Homomorphismus g: $\bar{H}$: ⟶ $\bar{\bar{H}}$ nach der Art von 2.3 definiert ($\bar{\bar{H}}$ ist der Raum der stetigen Abbildungen bzw. der Homotopieäquivalenzen von M nach M). Die Verknüpfung gf, gebildet navh 2.2, ist identisch mit dem durch die Abbildungen

uor: K ⟷ M :s∘v und die Homotopie

$$(T + R)(x,t) = \begin{cases} s \circ T(r(x),2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ R(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

definierten H-Homomorphismus von H nach $\overline{\overline{H}}$.

2.6 Sei H ein assoziativer H-Raum, x ein Element aus H und x^{-1} ein Homotopieinverses zu x. Ist $k: I \longrightarrow H$ eine Abbildung mit $k(0) = xx^{-1}$ und $k(1) = \varepsilon$, dem Neutralelement von H, dann ist $h := (h_n)$, mit

$$h_o(x_o) := x^{-1}x_o x,$$

$$h_n(x_o,t_1,\ldots,t_n,x_n) := x^{-1}x_o k(t_1)x_1 \cdots k(t_n)x_n x,$$

($n > 0$, $x_i \varepsilon H$), ein H-Homomorphismus von H nach H. h heißt der zu (x,k) gehörende innere H-Homomorphismus, wir schreiben daher auch $h_{x,k}$.

3. H-Morphismen.

3.1 Wir haben gesehen, daß die H-Homomorphismen als Morphismen einer Kategorie, in der die assoziativen H-Räume die Objekte sind, nicht geeignet sind. Um geeignete Morphismen zu finden, definieren wir:

Definition: Zwei H-Homomorphismen $h,h': H \longrightarrow \overline{H}$ heißen homotop, wenn es eine Folge von Abbildungen

$$u_n: H(n) \times I \longrightarrow \overline{H}, \qquad n = 0,1,\ldots$$

gibt, sodaß

a) $u(t) := (u_{n,t})$ für jedes $t \in I$ ein H-Homomorphismus,

b) $u(0) = h$, $u(1) = h'$.

Sind h und h' homotop, so schreiben wir $h \simeq h'$. Man erkennt, daß die Homotopie von H-Homomorphismen eine Äquivalenzrelation darstellt.

Die Homotopieklassen (im Fall von Verwechslungsmöglichkeiten auch H-Homotopieklassen genannt) eines H-Homomorphismus h bezeichnen wir mit [h]. (Auch die Homotopieklassen einer stetigen Abbildung werden wir gelegentlich mit eckigen Klammern kennzeichnen!)

3.2 Seien f,g,h,φ und ψ wie in 2.2a bzw. 2.2b. Es gilt $gf \simeq h$.

Wir betrachten den Fall 2.2a: g gehört also zum Homomorphismus ψ. Die Abbildungen

$$u_n(x_0,t_1,\ldots,t_n,x_n,s) = \psi(f_{i_1}(x_0,\frac{t_1-\frac{s}{2}}{1-\frac{s}{2}},\ldots,x_{i_1})\cdots f_{n-i_j-1}(x_{i_j+1},\ldots,\frac{t_n-\frac{s}{2}}{1-\frac{s}{2}},x_n)),$$

$(s \in I, x_i \in F,\ i = 0,1,\ldots,n)$, sind stetig für jede Folge $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j < n$ $(j = 0,1,\ldots,n)$ und $t_{i_1+1},\ldots,t_{i_j+1} \in [0,\frac{s}{2}]$ und $t_i \in [\frac{s}{2},1]$ sonst.

Man bestätigt leicht, daß die Gesamtheit dieser Abbildungen eine stetige Abbildung u_n: $F(n) \times I \longrightarrow H$ definieren und zwar für jedes $n = 0,1,2,\ldots$. Da $(u_{n,s})$ für jedes $s \in I$ ein H-Homomorphismus ist, stellt $u = (u_n)$ eine Homotopie zwischen h und gf dar.

Der Fall 2.2b ist entsprechend zu behandeln.

3.3. Ist u eine Homotopie zwischen u(0) und u(1), - u(0), u(1): $F \longrightarrow G$ H-Homomorphismen -, ist ferner g: $G \longrightarrow H$ ein H-Homomorphismus, so sind offenbar gu(0) und gu(1) homotop und gu ist eine Homotopie zwischen den beiden H-Homomorphismen (gu ist in der naheliegenden Weise zu erklären). Entsprechend gilt: ist f: $F \longrightarrow G$ ein H-Homomorphismus und v: $G \times I \longrightarrow H$ eine Homotopie zwischen den H-Homomorphismen v(0) und v(1), so ist vf eine Homotopie zwischen v(0) f und v(1)f.

Man erkennt:

a) Das Zusammensetzen von H-Homomorphismen f,g induziert eine Verknüpfung der Homotopieklassen [f], [g].

b) Für diese Verknüpfung sind die Klassen [e] einseitige Neutralelemente (das folgt aus 3.2, wenn man für f bzw. g den zur Identität des entsprechenden H-Raumes gehoerenden H-Homomorphismus betrachtet).

3.4 Wir behaupten ferner: die Verknüpfung der Homotopieklassen von H-Homomorphismen ist assoziativ.

Seien f,g,h verknüpfbare H-Homomorphismen; es genügt zu zeigen, daß $(hg)f \simeq h(gf)$, dann gilt wegen 3.3a:

$$([h][g])[f] = [h]([g][f]).$$

Für n = 0 ist nichts zu beweisen, für n = 1 bedeutet die Angabe einer Homotopie zwischen $((hg)f)_1$ und $(h(gf))_1$ eine Deformation von $[0,\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1]$ zu $[0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4},1]$. Im

allgemeinen Fall wird die entsprechende Homotopie etwas unübersichtlich, wir verzichten daher auf ihre Wiedergabe; der Leser sollte in der Lage sein, diese Homotopie selbst aufzustellen.

3.5 Die Aussagen von 3.3 und 3.4 bedeuten:

Satz: Die assoziativen H-Räume und die Homotopieklassen von H-Homomorphismen bilden eine Kategorie $\mathfrak{K}$.

Wir werden die Morphismen der Kategorie $\mathfrak{K}$ auch H-Morphismen nennen.

3.6 Seien K,L,H,$\overline{H}$ wie in 2.4. Sei r: K ⟶ L eine Homoropieäquivalenz, s ein Homotopieinverses zu r und a: I ⟶ H eine Abbildung mit a(0) = s r, a(1) = id_K. Sei h der von a, r und s induzierte H-Homomorphismus von H nach $\overline{H}$.

Behauptung: [h] hängt nur von der Homotopieklasse von r ab.

Beweis: a) Seien r': K ⟶ L und R: K×I ⟶ L Abbildungen mit R(k,0) = r(k) und R(k,1) = r'(k), (k ε K). Mit Hilfe von a und R erhält man eine Abbildung a': I ⟶ H mit a'(0) = s r, a'(1) = id_K:

$$a'(t) = \begin{cases} s\ \tilde{R}(1-2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ a(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Sei h' der von a', r' und s induzierte H-Homomorphismus von H nach $\overline{H}$, dann ist

$$u_n(x_o,t_1,\ldots,t_n,x_n) := \tilde{R}(t)\ x_n\ \tilde{T}(t_n,t) \cdots \tilde{T}(t_1,t)\ x_o\ s$$

die n-te Homotopie der H-Homotopie u zwischen h und h'. Dabei ist

$$\tilde{T}(t_i,t) = \left\{ \begin{array}{ll} a((1-2t)t_i + 2t\cdot\min(2t_i,1)), & 0 \le t \le \frac{1}{2},\ t_i \varepsilon\ I, \\ s\ \tilde{R}(2t-2t_i-1), & 0 \le t_i \le t-\frac{1}{2}, \\ a(\min(2t_i-2t+1,1), & t-\frac{1}{2} \le t_i \le 1, \end{array} \right\} t\ \varepsilon\ [\tfrac{1}{2},1].$$

Wir sagen, h' entsteht aus h durch Verschieben von r längs $\tilde{R}$.

Eine entsprechende Überlegung zeigt: wählt man an Stelle von s eine zu s homotope Abbildung, so erhält man einen zu h H-homotopen H-Homomorphismus. Da die Homotopiklasse von s durch die Homotopieklasse von r eindeutig bestimmt ist, kann also [h] nur von a und der Homotopieklasse von r abhängen.

b) [h] hängt nicht von a ab: Wir schreiben für h jetzt h_a. Sei b eine weitere Homotopie zwischen s r und id_K ($b(0) = a(0) = s\,r$, $b(1) = a(1) = id_K$). Ist b als 'Weg' homotop zu a, so ist h_a offenbar H-homotop zu h_b. Andernfalls repräsentieren a unf b ein von Null verschiedenes Element [a-b] aus $\pi_1(H)$:

$$(a-b)(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ b(2(1-t)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Homotopieäquivalenz $s: L \longrightarrow K$ induziert einen Isomorphismus $s_+: \pi_1(L^K) \longrightarrow \pi_1(K^K)$. Sei c ein Repräsentant von $s_+^{-1}[a-b]^{-1}$. Verschiebt man r längs c, so erhält man aus h_a einen H-Homomorphismus h_{sc+a}, sc + a ist aber als 'Weg' homotop zu b, daher ist h_b H-homotop zu h_{sc+a} und nach a) H-homotop zu h_a.

Corollar: Die Gruppe der Inneren H-Morphismen von H ist isomorph zu $\pi_0(H)$, falls H der Raum der Homotopieäquivalenzen eines lokalkompakten Hausdorffraumes ist.

Eine entsprechende Überlegung zeigt, daß die inneren H-Morphismen eines beliebigen H-Raums nicht von k abhängen (vgl. Definition 2.6), sondern von [k].

3.7 Ein Homomorphismus kann auf verschiedene Weisen zu einem H-Homomorphismus ergänzt werden:

topologie von [9], p 336:

Definition: Eine Abbildung $\tilde{f}$ eines topologischen Raumes X nach Z^Y (Y und Z seien topologische Räume) heißt quasistetig, wenn die zugehörige Abbildung $f: X \times Y \longrightarrow Z$ stetig ist.

Mit Hilfe der quasistetigen Abbildungen kann man Homotopietheorie von Abbildungsräumen treiben. Wir benötigen das einfach zu gewinnende Resu tat:

Lemma: Ist $a: X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so induziert a Isomorphismen

$$a_+: \pi_n(X^Z) \longrightarrow \pi_n(Y^Z),$$
$$a^+: \pi_n(Z^Y) \longrightarrow \pi_n(Z^X), \quad \text{für alle } n = 0,1,2,\ldots .$$

4.4 Beweis des Satzes:

Seien H und G H-Räume und $a: H \longrightarrow G$ ein H-Homomorphismus. Außerdem sei die erste Abbildung von a, a_o, eine Homotopieäquivalenz und b_o ein Homotopieinverses zu a_o.

Induktionsanfang: Seien $k_o: H \times I \longrightarrow H$ und $l_o: G \times I \longrightarrow G$ Abbildungen mit

$$k_o(x_o,1) = (b_o a_o)x_o, \qquad l_o(y_o,1) = (a_o b_o)y_o,$$
$$k_o(x_o,0) = x_o\ , \qquad l_o(y_o,0) = y_o\ .$$

k_o und l_o seien so gewählt, daß es eine Abbildung

$$u_o: H \times I^2 \longrightarrow G$$

gibt mit $u_o(x_o,0,s_2) = (a_o k_o)(x_o,s_2)$,
$u_o(x_o,1,s_2) = l_o(a_o(x_o),s_2)$, $\quad x_o \varepsilon H, s_2 \varepsilon I$,

und

$$u_o(x_o,s_1,1) = (a_o b_o a_o)x_o,$$
$$u_o(x_o,s_1,0) = a_o x_o, \qquad x_o \varepsilon H, s_1 \varepsilon I.$$

Das ist möglich, da nach Wahl von k_o die Abbildung l_o als 'Weg' von $a_o b_o$ nach id_G so gewählt werden kann, daß

$$w(t) = \begin{cases} (a_o k_o)(x_o)(1-2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (l_o a_o)(x_o)(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

das Nullelement in $\pi_1(G^H, a_o)$ repräsentiert (a_{o+} und a_o^+ sind nach Lemma 4.3 Isomorphismen).

4.5 Wir müssen b_o zu einem H-Homomorphismus von G nach H und k_o bzw. l_o zu H-Homotopien k bzw. l zwischen ba und e_H bzw. ab und e_G ergänzen, um unseren Satz zu beweisen. Im Folgenden führen wir den Schritt von n = 0 nach n = 1 ausführlich vor. Den Induktionsschritt führen wir dann nicht mehr durch.

Konstruktion von b_1, k_1 und l_1:

Wir betrachten an Stelle von $H(1) \times I^2$ den Raum $H^2 \times I^3$. Beide Räume sind vermittels der Abbildung

$$(x_o, t_1, x_1, s_1, s_2) \longrightarrow (x_o, x_1, t_1, s_1, s_2)$$

homöomorph.

Wir definieren eine Abbildung c_1 von einem gewissen Teilraum $T_1 \subset H^2 \times I^3$ nach G (vgl. die Figur). Und zwar ist

$$T_1 = H^2 \times [(I^2 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I^2) \cup (\{1\} \times I^2) \cup ([0, \tfrac{1}{3}] \times \{0\} \times I) \cup$$
$$\cup ([\tfrac{2}{3}, 1] \times \{1\} \times I)] \cup \{([0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]) \times I \times \{1\}\}.$$

c_1 wird dann definiert durch

$$(x_o, x_1, t_1, s_1, 0) \longrightarrow \begin{cases} a_o(x_o)a_o(x_1), & 1 \geq s_1 \geq \frac{3}{2}t_1, \\ a_1(x_o, 3t_1 - 2s_1, x_1), & 2s_1 \leq 3t_1 \leq 2s_1 + 1, \\ a_o(x_o, x_1), & \frac{3}{2}t_1 - \frac{1}{2} \geq s_1 \geq 0 \end{cases}$$

auf $H^2 \times I^2 \times \{0\}$ (der zweiten Abbildung einer H-Homotopie zwischen $(ae_H)_1$ und $(e_G a)_1$ bei geeigneter Zusammensetzungsvorschrift). Den bisher definierten Teil von c_1 kann man auch durch

Sei H der H-Raum, der nur aus dem Neutralelement 1 besteht und sei $\overline{H} = S^1$. Zur Inklusion $h_o: 1 \longrightarrow S^1$ gehört der H-Homomorphimus (h_n) mit $h_n(1,t_1,\ldots,t_n,1) = 1$, $(n = 1,2,\ldots)$; jedoch die Folgen (h_n^k):

$$h_n^k(t_1,\ldots,t_n) = \exp(2k\pi i \sum_{j=1}^{n} t_j), \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

bilden zusammen mit h_o auch H-Homomorphismen. Sie repräsentieren jedoch ein- und denselben H-Morphismus:

$$H_n^k(t_1,\ldots,t_n,t) = \exp[2k\pi i t(-1-\sum_{j=1}^{n}(1-t_j))], \quad t \in I,$$

ist eine H-Homotopie zwischen h^o und h^k.

In 7.10 zeigt ein Beispiel von D. PUPPE, daß verschiedene Ergänzungen eines Homomorphimus zu einem H-Homomorphismus nicht immer H-homotop sind.

3.8 Wir bezeichnen die Kategorie der assoziativen H-Räume und Homotopieklassen von Homomorphismen mit $\mathcal{G}$. Die Zuordnung [Homomorphismus] $\longrightarrow$ [zugehöriger H-Homomorphismus] definiert dann einen Funktor J von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$ (mit $J\varphi$ bezeichnen wir jedoch auch den zu einem Homomorphismus φ gehörigen H-Homomorphismus!). Beispiel 7.11 zeigt, daß J nicht injektiv ist.

4. H-Isomorphismen.

4.1 Definition: Ist $h: H \longrightarrow G$ ein H-Homomorphismus mit der Eigenschaft, daß h_o eine Homotopieäquivalenz ist, so heißt $[h]$ ein H-Isomorphismus.

Die Rechtfertigung dieser Definition folgt aus dem

Satz: Jeder H-Isomorphismus besitzt einen inversen H-Isomorphismus.

4.2 Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, sind noch einige Begriffe erforderlich.

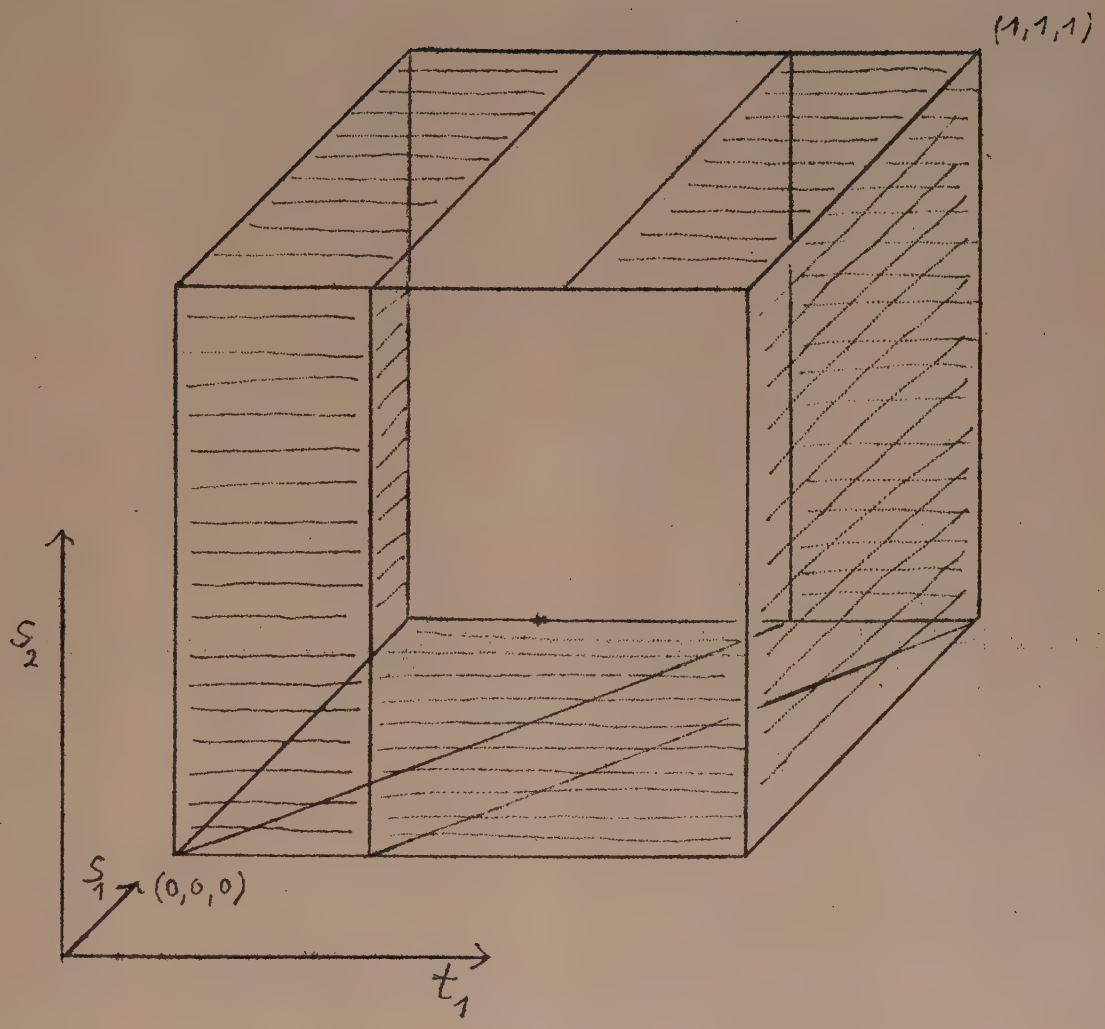
Definition: Eine Folge von Abbildungen $h_i: H(i) \longrightarrow G$ ($k_i: H(i) \times I \longrightarrow G$), $i = 0,1,\ldots,n$, heißt n-te Teilfolge eines H-Homomorphismus (einer H-Homotopie), wenn die Abbildungen h_i ($k_{i,t}$ für jedes $t \in I$) den Vertauschungsregeln von 1.2 für $i = 0,1,\ldots,n$ genügen.

Definition: $\delta H(n)$ sei der Teilraum von $H(n)$, der das Bild von $H^{n+1} \times \dot{I}^n$ bei dem Homöomorphismus

$$(x_o, x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow (x_o, t_1, x_1, \ldots, t_n, x_n)$$

zwischen $H^{n+1} \times I^n$ und $H(n)$ ist. $h_n | \delta H(n)$ bezeichnen wir mit δh_n, und $k_n | \delta(H(n) \times I)$ bezeichnen wir mit δk_n ($\delta(H(n) \times I) := (\delta H(n) \times I) \cup (H(n) \times \dot{I})$). δh_n und δk_n sind durch die (n-1)-te Teilfolge eines H-Homomorphismus bzw. einer H-Homotopie zwischen zwei gegebenen H-Homomorphismen und diese H-Homomorphismen festgelegt.

4.3 $\delta h_n: \delta H(n) \longrightarrow G$ bestimmt ein Element aus $\pi_{n-1}(G^{H^{n+1}})$, wie man sofort nachprüft und δk_n bestimmt ein Element aus $\pi_n(G^{H^{n+1}})$. Die Räume G^{H^n} etc. versehen wir dabei mit der Quasi-


(1,1,1)
s_2
s_1
(0,0,0)
t_1

5. Die DL-Konstruktion.

5.1 In diesem Abschnitt stützen wir uns ziemlich stark auf die Ergebnisse von [2]. Wir bringen zuerst einen Überblick über die für uns wichtigen Begriffe und Ergebnisse dieser Arbeit. Zunächst die Begriffe:

a) Alle topologischen Räume setzen wir von jetzt an als T_1-Räume voraus.

b) Ein H-Raum ist ein topologischer Raum mit einer stetigen Multiplikation

$$\mu : H \times H \longrightarrow H, \quad (x,x') \longrightarrow xx',$$

mit zweiseitigem Neutralelement ε. Die Linkstranslationen müssen Isomorphismen aller Homotopiegruppen induzieren.

c) Ist $p: E \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung, so operiert H auf E, wenn es eine stetige Abbildung

$$\mu : E \times H \longrightarrow E, \quad (y,x) \longrightarrow yx,$$

gibt mit

1) $y\varepsilon = y$ und $y(xx') = (yx)x'$,

2) $\mu(y \times H) \subset F_y = p^{-1}(py)$ = Faser über py.

Wir nennen (E,p,B,H) eine Prinzipalfaserung, wenn außerdem

3) $\mu_{y+}: \pi_i(H) \cong \pi_i(F_y)$ für alle $y \in E$ und $i \geq 0$

(μ_{y+} induziert durch $\mu_y: H \longrightarrow F_y$, $\mu_y(x) = yx$).

d) Eine asphärische Prinzipalfaserung ($\pi_i(E) = 0$ für alle $i \geq 0$) heißt universell.

e) Ist $p: E \longrightarrow B$ eine Quasifaserung (d.h. p ist surjektiv und $p_+: \pi_i(E,p^{-1}(x),y) \cong \pi_i(B,x)$ für alle $x \in B$, $y \in p^{-1}(x)$ und $i \geq 0$), so heißt (E,p,B,H) (vgl. c)) eine Prinzipalquasifaserung.

5.2 Jetzt die Ergebnisse:

a) Zu jeder Prinzipalquasifaserung (E,p,B,H) konstruieren

Dold und Lashof in [2] eine universelle Prinzipalquasifaserung $(E_\infty, p_\infty, B_\infty, H)$ (Theorem 3.5, p. 294). Sie wird mittels einer Folge von Prinzipalquasifaserungen (E(n), p(n), B(n), H) (n = 0, 1,2,...) gewonnen. Es ist (E(0), p(0), B(0), H) = (E,p,B,H). Die Operation von H auf der n-ten Prinzipalquasifaserung wird als

$$\mu_n: \quad E(n) \times H \longrightarrow E(n)$$

bezeichnet.

b) Wir beschränken uns von jetzt an auf die Fälle, in denen (E,p,B,H) = (H,p,P,H), bei denen also B nur aus dem Punkt P besteht und die Multiplikation von H auch die Operation auf E = H ist. Dann gilt: Die Punkte von E(n) können mit Hilfe von Punkteklassen aus H(n) beschrieben werden: Man betrachte die durch die folgenden Relationen erzeugte Äquivalenzrelation für Punkte aus H(n):

$$(x_0, t_1, \ldots, t_n, x_n) \sim (x_0', t_1', \ldots, t_n', x_n')$$

genau dann, wenn für ein i ($1 \leq i \leq n$) gilt:

entweder $t_i = 0$ und $x_j = x_j'$, $t_j = t_j'$ für alle $j \geq i$,

oder $t_i = t_i' = 1$, $x_{i-1}x_i = x_{i-1}'x_i'$ und $x_j = x_j', t_j = t_j'$ sonst.

Die Äquivalenzklassen der so erzeugten Äquivalen relation beschreiben die Punkte aus E(n). Die Abbildung

$$(x_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, x_{n-1}) \longrightarrow (x_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, x_{n-1}, 1, \varepsilon)$$

ermöglicht es, H(n-1) als Teilmenge von H(n) aufzufassen, und offenbar auch E(n-1) als Teilmenge von E(n). Ist also $y \in E(n-1)$, $t \in I$, $x \in H$, so kann man die Punkte von E(n) auch als $y|t|x$ schreiben, wobei $y|1|x'$ und $y'|1|x'$ denselben Punkt bedeuten, wenn $yx = y'x'$, und $y|0|x$ desnselben Punkt wie $y'|0|x$ für beliebige $y,y' \in E(n-1)$. Wir schreiben einfach yx für $y|1|x$ und bringen damit zum Ausdruck, daß wir E(n-1) als Teilmenge von E(n) auffaßen.

Die Topologie von E(n) ist die gröbste, bei der die 'Koordinatenabbildungen'

$$\begin{aligned} t&: E(n) \longrightarrow [0,1], \quad y|t|x \longrightarrow t,\\ yx&: t^{-1}(0,1] \longrightarrow E(n-1), \quad y|t|x \longrightarrow yx,\\ x&: t^{-1}[0,1) \longrightarrow H, \quad y|t|x \longrightarrow x,\\ y&: t^{-1}(0,1) \longrightarrow E(n-1), \quad y|t|x \longrightarrow y, \end{aligned}$$

stetig sind (wenn nötig, schreiben wir die Koordinatenabbildungen auch t(n) etc. an Stelle von t etc.). Diese Topologie ist i.A. gröber als die Quotiententopologie der Äquivalenzrelation. E(n-1) kann bei dieser Topologie als Teilraum von E(n) aufgefaßt werden. Die Operation von H auf E(n) ist durch

$$\mu_n(y|t|x,x') = y|t|xx', \quad y \in E(n-1),\ x,x' \in H,\ t \in I,$$

definiert.

Den induktiven Limes der Räume E(n) bezeichnen wir mit E_H. Die Räume B(n) und die Abbildungen $p_n: E(n) \longrightarrow B(n)$ beschreiben wir in 4.6, der induktive Limes der Räume B(n) wird mit B_H bezeichnet. (E_H, p_H, B_H) ist nach [3], 2.15 eine Quasifaserung. Ob H auf E_H operiert, ist uns nicht bekannt (vgl. die Definition von E_∞ in [2], $E_H \neq E_\infty$).

5.3 Seien H und $\overline{H}$ zwei H-Räume und h ein H-Homomorphismus von H nach $\overline{H}$. Wir wollen eine fasernweise Abbildung

$$\phi_n: E_H \longrightarrow E_{\overline{H}}$$

konstruieren. Wir beginnen mit $\phi_0: E(0) \longrightarrow \overline{E}(0)$: Da $E(0) = H$ und $\overline{E}(0) = \overline{H}$ ist, setzen wir $\phi_0 := h_0$. Für $n > 0$ setzen wir

$$\phi_n(y) := \phi_{i-1}(x_0,t_1,\ldots,x_{i-1})|\max(4t_i-1,0)|h_{n-i}(x_i,\min(4t_{i+1}-2,1),\ldots,x_n)$$

falls für $(x_0,t_1,\ldots,t_n,x_n) \in y \in E(n)$ gilt: für ein festes i

mit $1 \leq i \leq n$ ist $0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \leq t_k \leq 1$ für alle $i < k \leq n$. Gilt jedoch $\frac{1}{2} \leq t_k \leq 1$ für alle $k = 1,\ldots,n$, so setzen wir

$$\phi_n(y) := h_n(x_o,\min(4t_1-2,1),\ldots,\min(4t_n-2,1),x_n).$$

Gilt für ein j $(i < j \leq n)$ etwa $t_j = \frac{1}{2}$, so ist diese Definition nicht eindeutig. Da dann aber $\min(4t_j-2,1) = 0$, also

$$\phi_{i-1}(y_{i-1})|\max(4t_i-1,0)|h_{j-i-1}(x')h_{n-j}(x'')$$

$$= \phi_{i-1}(y_{i-1})|\max(4t_i-1,0)|h_{j-i-1}(x')h_{n-j}(x'')$$

$= \phi_{j-1}(y_{j-1})|1|h_{n-j}(x'')$ ist, stimmen beide Definitionen überein $(x \in H(n-i), x' \in H(j-i-1), x'' \in H(n-j))$. ϕ_n hängt ferner nur von der Äquivalenzklasse von $(x_o,t_1,\ldots,t_n,x_n)$, also nur von $y \in E(n)$ ab und es gilt:

$$\phi_n: y \longrightarrow \phi_n(y) \in \overline{E}(i) \subset \overline{E}(n).$$

Wir behaupten, daß ϕ_n stetig ist. Zum Beweis betrachten wir die Mengen

$$U_n^n := t(n)^{-1}[0,\tfrac{1}{2}],$$

$$U_n^{n-1} := (yx(n)^{-1}(t(n-1)^{-1}[0,\tfrac{1}{2}]))\ t(n)^{-1}[\tfrac{1}{2},1]$$

$$= (yx(n)^{-1}(U_{n-1}^{n-1}))\ t(n)^{-1}[\tfrac{1}{2},1],$$

$$\vdots$$

$$U_n^o := (yx(n)^{-1}(U_{n-1}^o))\ t(n)^{-1}[\tfrac{1}{2},1].$$

Diese Mengen bilden eine abgeschlossene Überdeckung $\mathcal{U}_n$ von $E(n)$, wie man durch Induktion feststellt. Wir beachten, daß $U_n^i \cap E(n-1) = U_{n-1}^i$ $(n \geq i \geq 0)$. Die Stetigkeit von ϕ_n folgt dann induktiv mit Hilfe der Koordinatenabbildungen (Man zeigt jeweils, daß $\phi_i|U_i^j$ stetig ist).

5.4 Da $\phi_n|E(n-1) = \phi_{n-1}$, definiert die Folge der Abbildungen

ϕ_n ($n = 0,1,2,\ldots$) eine stetige Abbildung $\phi_h: E_H \longrightarrow E_{\overline{H}}$. Es gilt:

a) ϕ_h ist eine fasernweise Abbildung. (vgl. 5.6).

b) Sind h,h' H-Homomorphismen von H nach $\overline{H}$, die H-homotop sind, so sind ϕ_h und $\phi_{h'}$ fasernweise homotop (Bei der Konstruktion dieser Homotopie benutzt man, daß der induktive Limes mit der Produktbildung mit einem lokalkompakten Faktor vertauschbar ist, vgl. [3],2.

5.5 Sei $\mathcal{Y}$ die Kategorie der quasigefaserten topologischen Räume und Homotopieklassen fasernweiser stetiger Abbildungen. Wegen der in 5.4 erwähnten Eigenschaften induziert ϕ_h eine Abbildung von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(H,\overline{H})$ nach $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(E_H,E_{\overline{H}})$, die wir E nennen wollen. Außerdem haben wir eine Abbildung, die jedem Objekt H aus $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ bestehe jetzt nur aus Objekten, die ein H-Raum im Sinn von 5.1 sind, und deren Morphismen) das Objekt E_H aus $\mathcal{Y}$ zuordnet, die wir auch E nennen.

Satz: E ist ein Funktor.

Der Beweis ergibt sich aus den beiden Bemerkungen:

Bemerkung 1: Gehört h zu einem Homomorphimus (vgl. 2.1), so ist ϕ_h fasernweise homotop zu der Abbildung $f_\infty: E_H \longrightarrow E_{\overline{H}}$ von [2], 3.8. Insbesondere ist ϕ_e fasernweise homotop zu id_{E_H}.

Denn, ist $j_1: E_H \longrightarrow E_H$ diejenige Abbildung, die alle t-Koordinaten t_i in $\min(2t_i,1)$ abbildet, so ist $\phi_h = f_\infty j_1 \cdot j_1$ ist jedoch fasernweise homotop zur Identität von E_H.

Bemerkung 2: Ist $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(H,\overline{H})$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\overline{H},\overline{\overline{H}})$, so ist $E(\beta)\circ E(\alpha) = E(\beta$

Sind g bzw. h Repräsentanten von α bzw. β, so ergibt sich der Beweis aus der Tatsache, daß $\phi_h\phi_g = \phi_{hg}j_2$, wobei $j_2: E_H \longrightarrow E_H$ diejenige Abbildung ist, die alle t-Koordinaten t_i in $2t_i$, wenn $t_i \in [0,\frac{1}{4}]$, $t_i + \frac{1}{2}$, wenn $t_i \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, und $\frac{1}{2}(t_i + 1)$, wenn $t_i \in [\frac{1}{2},1]$, abbildet. j_2 ist aber fasernweise homotop zur Identität von E_H.

Bei allen hier aufgetretenen Homotopien wurde die Faser E(0) stets in dieselbe Faser abgebildet.

5.6 Und nun zu B(n): Wir bezeichnen mit B(n) die Punktmenge des Abbildungskegels von p_{n-1}. Die Punkte aus B(n) kennzeichnet man durch $y \perp t$, wo $y \in E(n-1)$, $t \in I$. Es ist $y \perp 0 = y' \perp 0$ für alle $y, y' \in E(n-1)$ und $y \perp 1 = y' \perp 1$, wenn $p_{n-1}(y) = p_{n-1}(y')$.

Die Topologie von B(n) ist die gröbste, bei der die Koordinatenabbildungen

$$t: \quad B(n) \longrightarrow [0,1], \qquad y \perp t \longrightarrow t,$$
$$y: \quad t^{-1}(0,1) \longrightarrow E(n-1), \qquad y \perp t \longrightarrow y,$$
$$p: \quad t^{-1}(0,1] \longrightarrow B(n-1), \qquad y \perp t \longrightarrow p_{n-1}(y)$$

stetig sind. Die Projektion $p_n: E(n) \longrightarrow B(n)$ ist durch $p_n(y|t|x) = y \perp t$ definiert. p_n ist stetig.

5.7 Aus 5.4a folgt: ϕ_n induziert eine Abbildung von Mengen $\varphi_n: B(n) \longrightarrow \overline{B}(n)$. Sei

$$t'(t) := \begin{cases} \max(4t-1,0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

dann ist $\varphi_n(y \perp t) = \phi_{n-1}(y) \perp t'(t)$, wie man mit Hilfe der Definition von ϕ_n und der Tatsache $\phi_n | E(n-1) = \phi_{n-1}$ sofort feststellt. Wendet man auf φ_n die Koordinatenabbildungen von $\overline{B}(n)$ an, so erhält man stetige Abbildungen, d.h. φ_n ist stetig. Außerdem sieht man, daß $\varphi_n | B(n-1) = \varphi_{n-1}$ ist. Daher definiert die Folge der Abbildungen φ_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ eine stetige Abbildung $\varphi_h: B_H \longrightarrow B_{\overline{H}}$, denn B_H ist induktiver Limes der Räume B(n).

5.8 Sei $\mathfrak{T}$ die Kategorie, deren Objekte die bogenweise zusammenhängenden topologischen Räume mit nicht ausgeartetem Grundpunkt (vgl. [7], 5.5, p. 333 und Anhang) und deren Morphismen Homoto-

pieklassen punktierter Abbildungen sind. Im Anhang werden wir zeigen, daß $B_H \in \mathcal{T}$, wenn $H \in \mathcal{H}$. Da sich die Eigenschaften von ϕ_h aus 5.4 mit Hilfe der Beziehung (+): $\varphi_n(y \perp t) = \phi_{n-1}(y) \perp t'(t)$ in entsprechend Eigenschaften von φ_h übersetzen lassen, folgt: φ_h induziert eine Abbildung

$$B: \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(H, \overline{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(B_H, B_{\overline{H}}).$$

Da die Dold-Lashof'sche Konstruktion eine Abbildung B der Objekte H von $\mathcal{H}$ in die Objekte von $\mathcal{T}$ liefert: $B(H) := B_H$, gilt der

Satz: B ist ein Funktor.

Der Beweis läßt sich wieder durch die Beziehung (+) aus dem Beweis des entsprechenden Satzes aus 5.5 übertragen.

6. Ein natürlicher H-Morphismus von H nach $\Omega(B_H, b_o)$.

6.1 Sei X ein bogenzusammenhängender Hausdorff-Raum. Ein Weg W in X ist ein Paar, bestehend aus einer Abbildung $w: R^+ \longrightarrow X$ ($R^+ := [t|t \in R, t \geq 0]$) und einer nicht negativen Zahl r mit der Eigenschaft, daß $w(t) = w(r)$ für $t \geq r$. $\mathcal{W}(X) = [W|W$ ist Weg in $X]$ erhält die Teilraumtopologie von $X^{R^+} \times R^+$. Ist $W = (w,0)$, also $w(t) = w(0) = x$ für alle $t \in R^+$, so heißt W ein konstanter Weg, wir schreiben gelegentlich (x,0) an Stelle von (w,0).

Sind $W_1=(w_1,r_1)$ und $W_2=(w_2,r_2)$ Wege in X und ist $w_1(r_1) = w_2(0)$, so definiert man

$$W_2 + W_1 = (w_1 + w_2,\ r_1 + r_2),$$

wobei

$$(w_1 + w_2)(t) = \begin{cases} w_1(t), & 0 \leq t \leq r_1, \\ w_2(t-r_1), & r_1 \leq t. \end{cases}$$

Diese additiv geschriebene (i.A. nicht kommutative) Verknüpfung ist stetig und assoziativ überall, wo sie erklärt ist.

Ist $x_o \in X$, so definiert man

$$L(X,x_o) = [W|W = (w,r) \in \mathcal{W}(X),\ w(0) = x_o],$$

bzw. allgemeiner

$$L(X,A) = [W|W = (w,r) \in \mathcal{W}(X),\ w(0) \in A],$$

und

$$(X,x_o) = [W|W = (w,r) \in \mathcal{W}(X),\ w(0) = w(r) = x_o].$$

Diese Räume erhalten alle die Teilraumtopologie von $\mathcal{W}(X)$. Die partielle Multiplikation von $\mathcal{W}(X)$ macht $\Omega(X,x_o)$ zu einem H-Raum im Sinne von 5.1. Das Neutralelement ist $W_o = (x_o,0)$. Eine stetige Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ induziert einen Homomorphismus $\Omega f: \Omega(X,x_o) \longrightarrow \Omega(Y,f(x_o))$ durch die Zuordnung: $W = (w,r) \longrightarrow (fw,r) := \Omega W$. Ω ist ein Funktor.

Durch Ω wird ein Funktor von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{O}$ induziert, den wir wieder mit Ω bezeichnen wollen.

6.2 Wir benötigen das

Lemma: Ist H ein H-Raum und gehört H zur Klasse der T_1- bzw. der T_2-Räume, so gehört auch E_H und B_H zu der Klasse der T_1- bzw. T_2-Räume. Der Beweis ist einfach, da E_H und B_H induktive Limites von T_1- bzw. T_2- Räumen mit schönen Koordinatenabbildungen sind.

Wir beweisen den

Satz: Sei H ein hausdorff'scher H-Raum. Der schwache H-Homomorphismus (A_o, A_1) von H nach $\Omega(B_H, b_o)$ von Samelson [vgl. [8], p. 280] kann zu einem H.Homomorphismus A ergänzt werden.

6.3 Beweis: Wir konstruieren Abbildungen

$$g_n: \; H(n) \times R^+ \longrightarrow E(n+1) \quad E_H,$$
$$r_n: \; H(n) \longrightarrow R^+$$

so, daß $x \longrightarrow (pg_n(x), r_n(x)) = A_n(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, der gesuchte H-Homomorphismus von H nach $\Omega(B_H, b_o)$ ist:

$$A_n: \; H(n) \longrightarrow \Omega(B_H, b_o).$$

Zunächst erinnern wir daran, daß

$$k_n(y,t) = y|t|\varepsilon, \qquad y \in E(n),\ t \in I,$$

eine Kontr aktion von E(n) in E(n+1) in den Punkt $0|\varepsilon$ ist (vgl. [2], p. 290).

Wir setzen

$$g_o(x)(t) = \begin{cases} \varepsilon|1-2t|\varepsilon, & 0 \le t \le 1/2, \\ k_o(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1,\ x \in H = E(0) \\ x & 1 \le t, \end{cases}$$

und

$$r_o(x) = 1.$$

Dann ist $A_o(x) = (pg_o(x),1) = pG_o(x)$ ein Element von $\Omega(B_H,b_o)$, während $G_o(x) \in L(E_H,\varepsilon_o)$, $G_o(x) := (g_o(x),1)$.

6.4 Annahme: Die Abbildungen

$g_i: H(i)\times R^+ \longrightarrow E(i+1) \subset E_H$ und $r_i: H(i) \longrightarrow R^+$

seien für $0 \leq i \leq n$ so konstruiert, daß

1) $g_i(x)(0) = \varepsilon$ und $g_i(x)(t) = g_i(x)(r_i(x)) = e_i(x)$ für alle $x \in H(i)$ und $t \geq r_i(x)$, und daß ferner für $(x_1,x_2) \in H(j-1)\times H(i-j)$

2) $r_i(x_1,0,x_2) = r_{i-j}(x_2) + r_{j-1}(x_1)$,

3) $r_i(x_1,1,x_2) = r_{i-1}(\mu^i_j(x_1,x_2))$,

die Folge $(r_i)_{i=0,\ldots,n}$ also n-te Teilfolge eines H-Homomorphismus von H nach R^+ sei. Dazuhin sei $1 \leq r_i(x) \leq i+1$ für alle $i = 0,\ldots,n$.

Definiert man außerdem

$$G_i(x) := (g_i(x),r_i(x)) \in L(E(i),\varepsilon) \subset L(E_H,\varepsilon),$$

so sei für $(x_1,x_2) \in H(j-i)\times H(i-j)$:

4) $G_i(x_1,0,x_2) = G_{j-1}(x_1)e_{i-j}(x_2) + G_{i-j}(x_2)$ [+)]

und

5) $G_i(x_1,1,x_2) = G_{i-1}\mu^i_j(x_1,x_2)$ für alle $j \leq i$, $i = 1,\ldots,n$.

[+) Die Operation $\mu: E(i+1)\times H \longrightarrow E(i+1)$ induziert offenbar eine Abbildung $L\mu: L(E(i+1),H)\times H \longrightarrow L(E(i+1),H)$.]

6.5 Die n-te Teilfolge unseres H-Homomorphismus von H nach R^+ legt die (n+1)-te Abbildung r_{n+1} auf $\delta H(n+1)$ fest. Das Bild von $r_{n+1}|\delta H(n+1)$ ist wegen der Induktionsannahme im Intervall $[1,n+2]$ enthalten. Da dieses Intervall zusammenziehbar ist, gibt es also

$$r_{n+1}: H(n+1) \longrightarrow R^+$$

so, daß $(r_i)_{n=0,\ldots,n+1}$ (n+1)-te Teilfolge eines H-Homomorphismus von H nach R^+ ist und $1 \leq r_{n+1}(x) \leq n+2$ für alle $x \in H(n+1)$ gilt.

Setzt man $g_{n+1}(x)(0) = \varepsilon$, $x \in H(n+1)$,

und $g_{n+1}(x)(t) = e_{n+1}(x), \qquad t \geq r_{n+1}(x),$

so ist, soll g_{n+1} wieder den Bedingungen 4) und 5) (für $i = n+1$) genügen, G_{n+1} bereits auf $\delta H(n+1)$ festgelegt, also g_{n+1} auf $(\delta H(n+1) \times R^+) \cup [(x,t) | x \in H(n+1),\ t \in R^+ - (0, r_{n+1}(x))]$. Die Konstruktion $k_{n+1}: E(n+1) \times I \longrightarrow E(n+2) \subset E_H$ liefert die Erweiterung von g_{n+1} auf $H(n+1) \times R^+$, und damit G_{n+1}.

6.6 Man prüft unmittelbar nach, daß die Folge

$$A_n(x) = pG_n(x), \qquad n = 0,1,\ldots,$$

ein H-Homomorphismus von H nach $\Omega(B_H, b_o)$ ist. Der schwache H-Homomorphismus von Samelson geht aus (A_0, A_1) hervor, wenn man die Länge der Wege auf 1 beschränkt und von den Wegen mit festem Anfangspunkt zu den Wegen mit festem Endpunkt übergeht.

6.7 Satz: Sind H und $\overline{H}$ hausdorff'sche Räume, ist $h: H \longrightarrow \overline{H}$ ein H-Homomorphismus und $J\Omega\varphi_n: \Omega(B_H, b_o) \longrightarrow \Omega(B_{\overline{H}}, \overline{b}_o)$ der zum Homomorphismus $\Omega\varphi_h$ gehörige H-Homomorphismus, so ist das Diagramm

(7)
$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad [h] \quad} & \overline{H} \\ \Big\downarrow [A] & & \Big\downarrow [\overline{A}] \\ \Omega(B_H, b_o) & \xrightarrow[\quad [J\Omega\varphi_h] \quad]{} & \Omega(B_{\overline{H}}, \overline{b}_o) \end{array}$$

kommutativ.

6.8 Beweis: Wir werden die Kommutativität des Diagramms (7) für den Fall beweisen, daß $h: H \longrightarrow \overline{H}$ ein regulärer H-Homomorphimmus ist, das heißt, daß

a) $h_o(\varepsilon) = \overline{\varepsilon}$, $h_1(\varepsilon, t, \varepsilon) = \overline{\varepsilon}$,

b) $h_{n+1}(\varepsilon, t, x) = h_n(x)$, $n = 0,1,2,\ldots; x \in H(n)$,

gilt. Wir nehmen für den Augenblick diesen Beweis als geführt an.

Nicht jeder H-Homomorphismus ist regulär, aber für gewisse H-Räume ist jeder H-Morphismus durch einen regulären H-Homomorphismus repräsentier bar. Dabei ist wichtig, ob das Neutralelement des entsprechenden H-Raumes nicht ausgearteter Grundpunkt ist:

6.9 Ist H ein H-Raum mit nicht ausgeartetem oder ausgeartetem Grundpunkt ε und Multiplikation μ, für die ε Neutralelement ist, so ist $\check{H} = H \vee I$ mit

$$\check{\mu}(x,y) = \begin{cases} \mu(x,y), & x,y \in H, \\ y, & x \in I, y \in H, \\ x, & x \in H, y \in I, \\ xy, & x,y \in I, \end{cases}$$

(xy bedeute die übliche Multiplikation von I), ein H-Raum mit nicht ausgeartetem Grundpunkt $1 \in I \subset \check{H}$, den wir wieder ε nennen wollen. (Bei der Bildung von $H \vee I$ wird 0 als Grundpunkt von I angenommen, vgl. [7], 5.4).

Im Anhang beweisen wir das

Lemma: Jeder H-Homomorphismus $h: \check{H} \longrightarrow \overline{H}$ ist H-homotop zu einem regulären H-Homomorphismus.

Da die natürliche Projektion $\check{p}: \check{H} \longrightarrow H$ (Identifizieren von I zu einem Punkt) ein Homomorphismus und eine Homotopieäquivalenz ist, wird $J\check{p}$ ein regulärer H-Homomorphismus und $[J\check{p}]$ ein Isomorphismus in $\mathcal{H}$. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \check{H} & & \xrightarrow{[J\check{p}]} & & H & & \xrightarrow{[h]} & & \overline{H} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle [\check{A}]} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle [A]} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle [\overline{A}]} \\ \Omega(B_H, b_o) & & \xrightarrow[[J\Omega\check{\varphi}]]{} & & \Omega(B_H, b_o) & & \xrightarrow[[J\Omega\varphi_h]]{} & & \Omega(B_{\overline{H}}, \overline{b}_o) \end{array}$$

ist daher nach 6.8:

1) $$[\overline{A}][h \circ J\check{p}] = [J\Omega\varphi_h][J\Omega\check{\varphi}][\check{A}],$$

und

2) $$[A][J\check{p}] = [J\Omega\check{\varphi}][A].$$

Da $[J\check{p}]$ ein Isomorphismus ist, folgt daraus

$$[\bar{A}][h] = [J\Omega\varphi_h][A],$$

die Behauptung des Satzes (Es gilt $[h\circ J\check{p}] = [h][J\check{p}]$).

6.10 Zum Beweis des in 6.8 angemommenen Teils der Behauptung unseres Satzes benötigen wir den Begriff der H-Prinzipalabbildung:

Definition: Seien (E,p,B,H) und $(\bar{E},\bar{p},\bar{B},\bar{H})$ Prinzipalfaserungen, die zugehörigen Operationen von H bzw. $\bar{H}$ seien μ_1 und $\bar{\mu}_1$. Wir ersetzen nun im Produkt H(m) den ersten Faktor durch E und erklären $W_i^{m,o}$, $W_i^{m,1}$ und ν_i^m für das topologische Produkt $E\times I\times H(m-1)$ entsprechend den bekannten Abbildungen $V_i^{m,o}$, $V_i^{m,1}$ und μ_i^m (also z.B. $\nu_1^m(x_o,x_1,t_2,\ldots,t_m,x_m) = (\mu_1(x_o,x_1,t_2,\ldots,t_m,x_m)$, wobei $x_o\in E$, $x_i \in H$, $t_i \in I$ für $i = 1,\ldots,m$).

Eine H-Prinzipalabbildung zur Faserabbildung

(f,f'):

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad f \quad} & \bar{E} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ B & \xrightarrow[\quad f' \quad]{} & \bar{B} \end{array}$$

und zum H-Homomorphismus $h\colon H \longrightarrow \bar{H}$ ist eine Folge von Abbildungen $(f_o,f_1,\ldots,f_m,\ldots)$, $f_m\colon E\times I\times H(m-1) \longrightarrow \bar{E}$, $m = 1,2,\ldots$ mit $\bar{p}f_m = f'ppr_1$ und

$$f_m W_i^{m,o} = \bar{\mu}_1(f_{i-1}\times h_{m-i}), \qquad f_m W_i^{m,1} = f_{m-1}\,\nu_i^m.$$

(Dabei benutzen wir $f_o := f$).

Genau wie bei einem H-Homomorphismus sieht man, daß durch die m-te Teilfolge einer H-Prinzipalabbildung die (m+1)-te Abbildung auf $\delta(E\times I\times H(m-1)) := [E\times\dot{I}\times H(m-1)] \cup [E\times I\times\delta H(m-1)]$ festgelegt ist.

Im Anhang zeigen wir, daß es zu jedem H-Homomorphismus h und für

jedes $k = 0,1,\ldots,m,\ldots$ zur Faserabbildung ($\phi|E(k)$, $\varphi|B(k)$) eine H-Prinzipalabbildung ($\phi_{k,m}$) gibt. Da $\phi_{k,m}|E(k-1)\times I\times H(m-1) = \phi_{k-1,m}$ gilt, lassen wir in Zukunft den Index k weg, obwohl ($\lim_{k\to\infty}\phi_{k,m}$) möglicherweise keine Prinzipalabbildung ist, da E_H möglicherweise keine Prinzipalfaserung ist (E_H trägt die Limestopologie!).

Damit kommen wir zum angekündigten Beweis:

6.11 Wir betrachten $\overline{A}h\colon H \longrightarrow \Omega(B_{\overline{H}},\overline{b}_o)$. Wie bei der Konstruktion von A interessiert uns die Faktorisierung dieser Abbildungen über $L(E_{\overline{H}},\overline{\varepsilon})$:

$$(\overline{A}h)_n(x) = p(\overline{G}h)_n(x), \qquad x \in H(n),$$

wobei $(\overline{G}h)_n(x)$ auf folgende Weise definiert ist: Seien $0 < i_1 < \ldots < i_k \leq n$ diejenigen Indizes, für die $0 \leq t_{i_\nu} \leq \frac{1}{2}$, ($\nu = 1,\ldots,k$), dann ist:

$$(\overline{G}h)_n(x) = \overline{G}_k(h_{i_1-1}(x_o,2t_1-1,\ldots,x_{i_1-1}),2t_{i_1},\ldots,2t_{i_k},h_{n-i_k}(\ldots,x_n)).$$

$(\overline{G}h)_n$ hat die beiden Eigenschaften:

1) Ist $t_i = 1$, $(x_1,x_2) \in H(i-1)\times H(n-i)$, so ist
$$(\overline{G}h)_n(x_1,1,x_2) = (\overline{G}h)_{n-1}\mu_i^n(x_1,x_2),$$

2) Ist $t_i = 0$, $(x_1,x_2) \in H(i-1)\times H(n-i)$, so ist
$$(\overline{G}h)_n(x_1,0,x_2) = (\overline{G}h)_{i-1}(x_1)(\overline{e}h)_{n-i}(x_2) + (\overline{G}h)_{n-i}(x_2).$$

6.12 Jetzt betrachten wir die Faktorisierung von $\Omega\varphi_h A$ über $L(E_{\overline{H}},h_o(\varepsilon)) = L(E_{\overline{H}},\overline{\varepsilon})$. (Da $\Omega\varphi_h$ ein Homomorphismus ist, gilt nach 2.2a: $[\Omega\varphi_h A] = [J\Omega\varphi_h A]$.) Es ist $\Omega\varphi_h A(x) = (\Omega\varphi_h A)_n(x) = \overline{p}L\phi G_n(x)$. $L\phi G_n(x)$ hat die beiden Eigenschaften:

1) Ist $t_i = 1$, $(x_1,x_2) \in H\,i-1)\times H(n-i)$, s ist
$$L\phi G_n(x_1,1,x_2) = L\phi G_{n-1}\mu_i^n(x_1,x_2),$$

2) Ist $t_i = 0$, $(x_1,x_2) \in H(i-1)\times H(n-i)$, so ist
$$L\phi G_n(x_1,0,x_2) = L\phi[G_{i-1}(x_1)e_{n-i}(x_2)] + L\phi G_{n-i}(x_2).$$

Stünde hier

2a) $L\phi G_n(x_1,0,x_2) = [L\phi G_{i-1}(x_1)](he)_{n-i}(x_2) + L\phi G_{n-i}(x_2)$,

so könnten wir ähnlich wie bei der Konstruktion von G eine H-homotopie K zwischen $L\phi G$ und $\bar{G}h$ konstruieren, wobei wir an Stelle der Kontrahiebarkeit von E(n+1) in E(n+2) bei der Konstruktion von G_n hier beim n-ten Schritt die Kontrahierbarkeit von $\bar{E}(n+2)$ in $\bar{E}(n+3)$ ausnutzen würden.

6.13 Wir versuchen jetzt, $(L\phi G_n)$ durch eine Folge von Homotopien (F_n), F_n: $H(n)\times[0,\frac{1}{2}] \longrightarrow L(E_{\bar{H}},\bar{\varepsilon})$, so abzuändern, daß

1') $(L\bar{p}\ F_n)$ eine H-Homotopie ist,

2') $F_n|H(n)\times\frac{1}{2}$ Eigenschaften von der Art 1) und 2a) in 6.12 besitzt.

(Mit $L\bar{p}$ meinen wir die von $\bar{p}$: $E_{\bar{H}} \longrightarrow B_{\bar{H}}$ induzierte Abbildung von $L(E_{\bar{H}},\bar{\varepsilon})$ nach $L(B_{\bar{H}},\bar{b}_o)$.)

Aus 6.10 wissen wir, daß die Einschränkungen der Abbildungen ϕ_n: $E_H\times I\times H(n-1) \longrightarrow E_{\bar{H}}$, $(n = 1,2,\ldots)$, auf $E(k)\times I\times H(n-1)$ für jedes k eine H-Prinzipalabbildung zu der entsprechenden Einschränkung der Faserabbildung

$$(\phi,\varphi)\colon (E_H,B_H) \longrightarrow (E_{\bar{H}},B_{\bar{H}})$$

ergeben. Durch die Folge (ϕ_n) wird eine Folge von Abbildungen

$$L\phi_n\colon\ L(E_H,H)\times I\times H(n-1) \longrightarrow L(E_{\bar{H}},\bar{H}),\quad n = 1,2,\ldots,$$

induziert, die für jedes k, $(k = 0,1,\ldots)$,

1) die formalen Eigenschaften einer H-Prinzipalabbildung bezüglich der Operation $L\mu$ bzw. $L\bar{\mu}$ von (ϕ_n) übernimmt,

2) verträglich ist mit der Addition von Wegen.

Mit Hilfe dieser Abbildungen definieren wir die gesuchten Homotopien (F_n):

Sei $x \in H(n)$ und seien $0 < i_1 < \ldots < i_{k+1} = n+1$ diejenigen Indizes, für die $0 \le t_{i_\nu} \le \tau$ $(\nu = 1,\ldots,k;0 \le \tau \le \frac{1}{2})$.

Dann setzen wir

$$F_n(x, \ ) =$$
$$= L\phi_k(G_{i_1-1}(x_o,\ldots,\frac{t_i-\tau}{1-\tau},\ldots,x_{i_1-1}),1-2(\tau-t_{i_1}),x_{i_1}\cdots x_{i_2-1},1-2(\tau-t_{i_2}),\ldots\ )$$
$$+ V_k(\tau-t_{i_1},x_{i_1}\cdots x_{i_2-1},1-2(\tau-t_{i_1}),\ldots)$$
$$+ L\phi_{k-1}(G_{i_2-i_1-1}(x_{i_1},\ldots,\frac{t_i-\tau}{1-\tau},\ldots,x_{i_2-1}),1-2(\tau-t_{i_2}),\ldots\ )$$
$$+$$
$$\vdots$$
$$+ L\phi_o G_{n-i_k-1}(x_{i_k},\ldots,\frac{t_i-\tau}{1-\tau},\ldots,x_n)$$
$$+ V_o(\ \ ).$$

Dabei bedeutet

$$V_i(\tau-t_o,y_o,1-2(\tau-t_1,\ldots,y_{i-1}) := (h_{i-1}(y_o,1-2(\tau-t_1),\ldots,y_{i-1});2(\tau-t_o))$$

und

$$V_o(\tau) := (\bar{\varepsilon},2\tau),\ (y_j\varepsilon\ H,\ j=0,\ldots,i;0 \leq (\tau-t_j) \leq \tfrac{1}{2}).$$

(Wir verwenden hier, daß $h_i(\varepsilon,t,x) = h_{i-1}(x)$!)

Den Nachweis, daß (F_n) eine H-Homotopie mit den Eigenschaften 1') und 2') ist, sowie die Ausführung des in 6.12 skizzierten Teils unseres Beweises überlassen wir dem Leser.

7. Zwei Funktoräquivalenzen.

7.1 In diesem Abschnitt schränken wir die Objekte unserer Kategorien noch weiter ein:

Definition: Ein topologischer Raum X gehört zur Klasse $\mathcal{W}^0$, wenn X vom Homotopietyp eines abzählbaren CW-Komplexes ist.

Die Objekte unserer Kategorien $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ und $\mathcal{H}$ seien fortan nicht nur hausdorff'sch, sondern auch Elemente der Klasse $\mathcal{W}^0$. Es gilt das leicht zu beweisende

Lemma: Ist H ein H-Raum aus $\mathcal{W}^0$, so sind E_H und B_H Elemente aus $\mathcal{W}^0$.

7.2 Satz: Ist H ein hausdorff'scher H-Raum aus $\mathcal{W}^0$, so ist E_H kontrahierbar.

Beweis: Da H ein hausdorff'scher Raum. also insbesondere ein T_1-Raum ist, ist nach [3], Hilfssatz 2.14 jede kompakte Teilmen- von E_H in einer der Mengen E(n) enthalten. Da E(n) in E(n+1) kontrahierbar ist, ist E_H asphärisch. E_H ist jedoch ein Element aus $\mathcal{W}^0$ (vgl. 7.1), also auch kontrahierbar.

7.3 Satz: Ist der H-Raum H ein Hausdorff- Raum aus $\mathcal{W}^0$, so ist die erste Abbildung des H-Homomorphismus A,

$$A_0 : H \longrightarrow \Omega(B_H, b_0),$$

eine Homotopieäquivalenz.

Beweis: Da H ein T_1-Raum ist, ist (E_H, p_H, B_H) eine Quasifaserung (vgl. [3], p. 253); sei ε das Neutralelement von H, dann ist also $\varepsilon \in H = E(0) \subset E_H$. Da E_H nach 7.2 kontrahierbar ist, gibt es eine Abbildung

$$k : E_H \times I \longrightarrow E_H$$

so, daß $k(y,0) = \varepsilon$ und $k(y,1) = y$ für alle $y \in E_H$. k induziert in bekannter Weise (vgl. [8], Prop. 1) eine fasernweise Abbildung

von E_H nach $L(B_H,b_o)$. Diese Abbildung ist, da $L(B_H,b_o)$ kontrahierbar ist, eine Homotopieäquivalenz. In der Basis B_H wird die identische Abbildung induziert. Die von k induzierte Abbildung $K_H: H \longrightarrow \Omega(B_H,b_o)$: $K_H(x) = (p_H k(x,t),1)$, $(x \in H,\ t \in R^+)$, induziert also, angewandt auf die Homotopiefolgen der beiden Quasifaserungen (E_H,p_H,B_H) und (LB_H,Lp_H,B_H), Isomorphismen zwischen den Homotopiegruppen von H und denen von $\Omega(B_H,b_o)$. Da H und $\Omega(B_H,b_o)$ beide vom Homotopietyp von CW-Komplexen sind (vgl. [4], Corollary 3, p. 276), ist K_H eine Homotopieäquivalenz (vgl. [11], Theorem 1).

Unser Satz ist also bewiesen, wenn wir zeigen, daß die Abbildungen K_H und A_o homotop sind, Wir erinnern:

$$A_o(x) = (p_1 g_o(x,t,1), \quad (x \in H,\ t \in R^+).$$

Da $p_1 = p_H|E(1)$, genügt es zu zeigen: es gibt eine Abbildung $l: H\times I\times I \longrightarrow E_H$, so daß

$l(x,0,t) = k(x,t)$, $\quad x \in H,\ t \in I,$

$l(x,1,t) = g_o(x,t)$, $\quad x \in H,\ t \in I,$

$l(x,s,0) = \varepsilon$, $\quad x \in H,\ s \in I,$

$l(x,s,1) = x$, $\quad x \in H,\ s \in I.$

l ist daher auf $H\times \dot{I}^2$ bereits festgelegt. Da jedoch E_H kontrahierbar ist, kann $l|H\times\dot{I}^2$ auf $H\times I^2$ erweitert werden, und der Satz ist bewiesen.

7.4 Corollar: A(H) ist eine Funktoräquivalenz zwischen den Funktoren $1_{\mathcal{H}}$ und $J\Omega B$.

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Tatsache, daß [A] ein H-Isomorphismus und eine Funktortransformation ist.

7.5 Satz: Sei X ein Objekt der Kategorie $\mathcal{T}$ und b_o der Grundpunkt von X; dann sind X und $B(\Omega(X,b_o))$ in $\mathcal{T}$ isomorphe Objekte.

Beweis: Da X und $B(\Omega(X,b_0))$ als Objekte von $\mathcal{T}$ nicht entartete Grundpunkte besitzen, genügt es zu zeigen, daß sie vom selben Homotopietyp sind, ohne Berücksichtigung der Grundpunkte (vgl. [7], p. 333, 5.5E): Die Objekte von $\mathcal{T}$ waren ja als bogenweise zusammenhängend vorausgesetzt.

Wir benutzen im Folgenden die Sätze 3.8 und 3.9 aus [2].

Sei $(L_\infty(X,b_0), p_\infty, X_\infty, \Omega(X,b_0))$ die nach [2] zur Prinzipalfaserung $(L(X,b_0), p, X, \Omega(X,b_0))$ konstruierte universelle Prinzipalfaserung. Durch die Konstruktion von [2] wird ein Funktor von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{T}$ induziert, den wir mit $(\ )_\infty$ bezeichnen wollen:
$(\ )_\infty(X) := X_\infty$, $(\ )_\infty[f] := [f]_\infty$. (vgl. Proposition 3.9 in [2]).
Man weiß, daß die natürliche Inklusion $(j, \bar{j})$ der Ausgangsfaserung in die universelle in diesem Fall Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert. Da X und X_∞ aus $\mathcal{W}^0$ sind, ist also $\bar{j}$ eine Homotopieäquivalenz.

Die beiden Inklusionen $i: \Omega(X,b_0) \subset L(X,b_0)$ und $\bar{i}_0: b_0 \in X$ bilden zusammen einen Homomorphismus von Prinzipalfaserungen im Sinn der Definition 3.7 in [2]. Er induziert nach 3.9 in [2] den Homomorphismus $(i_\infty, \bar{i}_\infty)$: $(E_{\Omega(X,b_0)}, p, B\Omega(X,b_0), \Omega(X,b_0)) \longrightarrow$

$$\longrightarrow (L_\infty(X,b_0), p_\infty, X_\infty, \Omega(X,b_0)).$$

(Hier habe $E_{\Omega(X,b_0)}$ die in [2], 3.4 beschriebene Topologie und nicht die Limestopologie.)

$i_\infty | \Omega(X,b_0)$: $\Omega(X,b_0) \longrightarrow \Omega(X,b_0)$

ist die identische Abbildung. Daher induziert $\bar{i}_\infty$ Isomorphismen aller Homotopiegruppen, ist also Homotopieäquivalenz. Daraus folgt die Behauptung

7.6 Satz: Die Funktoren $id_{\mathcal{T}}$ und $B\Omega$ sind äquivalent.

Beweis: Aus Proposition 3.9 in [2] und aus dem Beweis des vorangehenden Satzes folgt, daß die Funktoren $id_{\mathcal{T}}$ und $(\ )_\infty$ äquivalent sind vermittels der Transformation $[\bar{j}]$, und die Funktoren $BJ\Omega$ und $(\ )_\infty$ vermittels der Transformation $[\bar{i}_\infty]$. Daraus folgt die Behauptung.

7.7 Corollar 7.4 und Satz 7.6 besagen zusammen:

Satz: Die folgenden Abbildungen sind bijektiv:

1) $J\Omega B$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H,\bar{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\Omega B_H, \Omega B_{\bar{H}})$,

2) $BJ\Omega$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,\bar{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(B_{\Omega X}, B_{\Omega \bar{X}})$,

3) B : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H,\bar{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(B_H, B_{\bar{H}})$,

4) $J\Omega$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,\bar{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\Omega X, \Omega \bar{X})$.

Die Abbildung

5) J : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,\bar{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\Omega X, \Omega \bar{X})$

ist surjektiv, die Abbildung

6) Ω : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,\bar{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\Omega X, \Omega \bar{X})$

ist injektiv.

Beispiel 7.11 beweist, J ist nicht injektiv. Daraus folgt, daß Ω nicht surjektiv ist.

7.8 Sei H ein Objekt aus $\mathcal{K}$. Da B_H der Kategorie $\mathcal{T}$ angehört, gibt es nach [5], Corollary 3.7 (p. 278) ein universelles Bündel mit B_H als Basis. Die Gruppe G dieses Bündels gehört zur Kategorie $\mathcal{K}$ (theorem 3.1 in [5]). Nach theorem 5.2 in [6] ist B_H vom gleichen Homotopietyp wie der in [6] konstruierte klassifizierende Raum von G. Die Konstruktionen des klassifizierenden Raumes von Milnor ([6]) und von Dold-Lashof ([2]) stimmen für topologische Gruppen bis auf Homotopieäquivalenz überein (vgl. [2], 4.2). Nach 7.7, 3) sind daher H und G H-isomorph.

Corollar: Jeder H-Raum aus $\mathcal{H}$ ist zu einer topologischen Gruppe

H-isomorph.

7.9 Vom Blickpunkt unserer Ergebnisse her ist der Übergang von schwachen H-Homomorphismen zu einer unendlichen Folge von Abbildungen notwendig. Das folgende, von W. BROWDER stammende Beispiel zeigt, daß der Begriff der endlichen Teilfolge eines H-Homomorphismus noch zu schwach ist: Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & L(Z_p,2q) \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ K(Z,2) & \xrightarrow[f]{} & K(Z_p,2q) \end{array} \qquad (q > 2).$$

X_1 sei die von f induzierte Faserung mit Faser $K(Z_p,2q-1)$. Die k-Invariante von X_1 (Element aus $H^{2q}(K(Z,2),Z_p)$) sei von 0 verschieden. Dann sind X_1 und $X := K(Z,2) \times K(Z_p,2q-1)$ nicht vom selben Homotopietyp.

Da jedoch $H^{2q-1}(K(Z,1),Z_p) = 0$, sind ΩX und ΩX_1 homotopieäquivalent. ΩX ist vom gleichen Homotopietyp wie $Y := S^1 \times K(Z_p,2q-2)$, wobei wir $K(Z_p,2q-2)$ als CW-Komplex mit nur einer Nullzelle, einer $(2q-2)$-Zelle und höherdimesnionalen Zellen gewählt denken. Die Zellenzerlegung von S^1 bestehe aus je einer Null- und Einszelle.

Sei $\alpha: \Omega X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz und β ein Homotopieinverses zu α. Die Konstruktion eines H-Homomorphismus von ΩX nach ΩX_1 versuchen wir auf dem Umweg über Y:

$$\begin{array}{ccc} \Omega X^n \times \dot{I}^{n-1} & \xrightarrow{\delta h_{n-1}} & \Omega X_1 \\ {\scriptstyle \alpha_n \times id_{\dot{I}^{n-1}}} \downarrow \uparrow {\scriptstyle \beta_n \times id_{\dot{I}^{n-1}}} & \nearrow {\scriptstyle \delta h_{n-1}(\beta_n \times id_{\dot{I}^{n-1}})} & \\ Y^n \times \dot{I}^{n-1} & & \end{array}$$

denn δh_{n-1} ist homotop zu $\delta h_{n-1}[(\beta_n \alpha_n) \times id_{\dot{I}^{n-1}}]$
($\alpha_n = \alpha \times \cdots \times \alpha$, $\beta_n = \beta \times \cdots \times \beta$, n-mal).

Sei $h_o : \Omega X \longrightarrow \Omega X_1$ eine Homotopieäquivalenz; h_o ist dann ein schwacher H-Homomorphismus: Da ΩX_1 bogenweise zusammenhängend ist, also $h_o(\varepsilon)$ mit ε_1 durch einen Weg verbunden werden kann, können wir sofort δh_1 auf $\delta\Omega X(1) \cup ((\Omega X \vee \Omega X) \times I)$ erweitern.
Wir erhalten eine entsprechende Abbildung $\delta h_1(\beta \times id_{\dot{I}}) =: \delta g_1$,
$\delta g_1 : (Y^2 \times \dot{I}) \cup ((Y \vee Y) \times I) \longrightarrow \Omega X_1$.

Da ΩX_1 nur zwei 'nichtverschwindende' Homotopiegruppen besitzt, können nur Hindernisse in $H^2(Y^2 \times I, (Y^2 \times \dot{I}) \cup ((Y \vee Y) \times I), Z_p)$ und in $H^{2q-1}(Y^2 \times I, [(Y^2 \times \dot{I}) \cup ((Y \vee Y) \times I)], Z_p)$ auftreten. Das (2q-1)-Gerüst (und da $q > 2$ ist, auch das 2-Gerüst) des auftretenden relativen CW-Komplexes enthält jedoch keine (2q-1)'Zellen, daher gibt es eine Erweiterung von δg_1 auf $Y^2 \times I$ und damit auch eine von δh_1 zu h_1.
Dasselbe Argument zeigt, daß (h_o, h_1) zu einer n-ten Teilfolge eines H-Homomorphismus erweitert werden kann, für jedes $n < q$.
Bei $n = q-1$ enthält das (2q-1)-Gerüst des entsprechenden relativen CW-Komplexes zum ersten Mal eine (2q-1)-Zelle. Da jedoch $X \not\simeq X_1$, kann es wegen 8.6 keinen H-Homomorphismus von ΩX nach ΩX_1 geben, dessen erste Abbildung eine Homotopieäquivalenz ist.

Es gibt daher je nach Wahl von q endliche Teilfolgen von beliebiger Länge, die nicht zu einem H-Homomorphismus ergänzt werden können.

7.10 Dieselben Räume können herangezogen werden, um zu zeigen, daß es verschiedene H-Morphismen [a] und [a'] gibt mit $a_o = a'_o$, selbst wenn $[a] \in \operatorname{Im} J\Omega$ ist (vgl. 3.7).
Betrachten wir zwei nicht homotope Abbildungen

$f,g:\quad K(Z,2) \longrightarrow K(Z_p,2q), \qquad q > 1,$

dann folgt: Ωf ist homotop zu Ωg als Abbildung. Da $BJ\Omega$ äquivalent zu $1_{\mathcal{T}}$ ist, folgt: $[J\Omega f] \neq [J\Omega g]$. Die Homotopie zwischen Ωf und Ωg ermöglicht es, einen Repräsentanten a' von $[J\Omega g]$ zu finden mit $a'_0 = \Omega f$. Dieses Beispiel verdanke ich D. PUPPE.

7.11 Wir betrachten das Einheitsintervall I. Die Multiplikation der reellen Zahlen induziert eine multplikative Struktur in I, welches dadurch zum H-Raum wird. Die Identität id_I und die Abbildung $1: I \longrightarrow 1 \in I$ sind Homomorphismen und als solche nicht homotop, d.h. $[1] \neq [id_I]$ in $\mathcal{T}$. Aber man sieht sofort, daß $J[1] = J[id_I]$ gilt, der Funktor J ist also im Allgemeinen nicht injektiv.

Anhang.

A1. Wir beweisen das folgende

Lemma: Jeder H-Homomorphismus $h: \overset{\vee}{H} \longrightarrow \overline{H}$ ist H-homotop zu einem regulären H-Homomorphismus.

$\overset{\vee}{H}$ wird auf die folgende Weise definiert (vgl. [7], 5.4): Wir betrachten den H-Raum H mit dem Neutralelement ε als Grundpunkt und I, das Einheitsintervall, mit Grundpunkt 0. Dann bildet man $H \vee I$ bezüglich dieser Grundpunkte und nimmt $1 \in I$ als neuen Grundpunkt von $\overset{\vee}{H} = H \vee I$. Die Multiplikation von $\overset{\vee}{H}$ wurde bereits in 6.9 beschrieben, $1 =: \varepsilon$ ist das Neutralelement dieser Multiplikation. Bei der Konstruktion neuer H-Homomorphismen ist der

Hilfssatz 1: Jede Abbildung $k: (\delta\overset{\vee}{H}(n) \times I) \cup (\overset{\vee}{H}(n) \times 0) \longrightarrow \overline{H}$ kann auf $\overset{\vee}{H}(n) \times I$ erweitert werden.

besonders wichtig.

Beweis: Nach Definition ist $\delta\overset{\vee}{H}(n)$ homöomorph zu $\overset{\vee}{H}^{n+1} \times \delta I^n$ (vgl. 4.1). Auf Grund der in 4.1 angegebenen Homöomorphie zwischen $\overset{\vee}{H}(n)$ und $\overset{\vee}{H}^{n+1} \times I^n$ erhält man eine Abbildung

$$k': \overset{\vee}{H}^{n+1} \times [(\delta I_n \times I) \cup (I^n \times 0)] \longrightarrow \overline{H},$$

die in bekannter Weise auf $\overset{\vee}{H}^{n+1} \times I^{n+1}$ erweitert werden kann. Mit Hilfe der zitierten Homöomorphie erhält man auch eine Erweiterung von k auf $\overset{\vee}{H}(n) \times I$.

Hat man einen H-Homomorphismus $h: \overset{\vee}{H} \longrightarrow \overline{H}$ gegeben und eine n-te Teilfolge $(h'_i)_{i=0,\ldots,n}$, die zu $(h_i)_{i=0,\ldots,n}$ H-homotop ist, so kann auf Grund von Hilfssatz 1 die Teilfolge $(h'_i)_{i=0,\ldots,n}$ zu einem zu h H-homotopen H-Homomorphismus erweitert werden: Sei $(k_i)_{i=0,\ldots,n}$ die n-te Teilfolge einer H-Homotopie zwischen $(h_i)_{i=0,\ldots,n}$ und $(h'_i)_{i=0,\ldots,n}$, so kennt man k_{n+1} bereits auf $(\delta\overset{\vee}{H}(n+1) \times I) \cup (\overset{\vee}{H}(n+1) \times 0)$ und kann es auf $\overset{\vee}{H}(n+1) \times I$ erweitern u.s.f.

Für unseren späteren Beweis genügt Hilfssatz 1 jedoch nicht. Wir benötigen

Hilfssatz:2: Jede Abbildung

$$k: (\delta\check{H}(n)\times I)\cup(\check{H}(n)\times 0)\cup(\varepsilon(i-1)\times I\times\check{H}(n-i)\times I) \longrightarrow \overline{H}$$

kann auf $\check{H}(n)\times I$ erweitert werden ($n = 0,1,\ldots;i = 1,\ldots,n+1^{+}$). ($^{+}$Wir verabreden: $\delta\check{H}(0) = \emptyset$, $I\times\check{H}(i-1)$ werde für $i = 1$ als ein Punkt aufgefaßt, ebenso $\check{H}^{0}$ udn I^{0}).

Beweis: Wieder gehen wir zurück zu $\check{H}^{n+1}\times I^{n}\times I$. Nach Definition enthält $\check{H}^{n+1}$ einen zu I^{n+1} homöomorphen Teilraum; wir schreiben $\check{H}^{n+1} = (\overline{\check{H}^{n+1} - I^{n+1}}) \cup I^{n+1}$. Es ist $(\overline{\check{H}^{n+1} - I^{n+1}})\cap I^{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} I_{0}^{n+1,i}$ ($I_{0}^{n+1,i}$ ist diejenige Seite von I^{n+1}, die man erhält, wenn man die i-te Koordinate auf 0 einschränkt). k induziert eine Abbildung

$$k': \check{H}^{n-i+1}\times([\check{H}^{i}\times((\delta I^{n}\times I)\cup(I^{n}\times 0))]\cup[\varepsilon^{i}\times I^{n+1}]) \longrightarrow \overline{H}.$$

k' kann von $\check{H}^{n-i+1}\times[(\overline{\check{H}^{i} \perp I^{i}})\times((\delta I^{n}\times I)\cup(I^{n}\times 0))]$ auf $\check{H}^{n-i+1}\times[(\overline{\check{H}^{i} - I^{i}})\times I^{n+1}]$ erweitert werden. Es fehlt dann noch eine Erweiterung von k' von

$$\check{H}^{n-i+1}\times[(\varepsilon^{i}\times I^{n+1})\cup(\bigcup_{k\neq 1}^{i} I_{0}^{i,k}\times I^{n+1})\cup(I^{i}\times[(\delta I^{n}\times I)\cup(I^{n}\times 0)])]$$

auf $\check{H}^{n-i+1}\times I^{i}\times I^{n+1}$. Diese Erweiterung ist ebenfalls möglich, da jede Homotopie einer Abbildung von I^{n}, die auf einem Teilkomplex von I^{n} bekannt ist, auf ganz I^{n} erweitert werden kann.

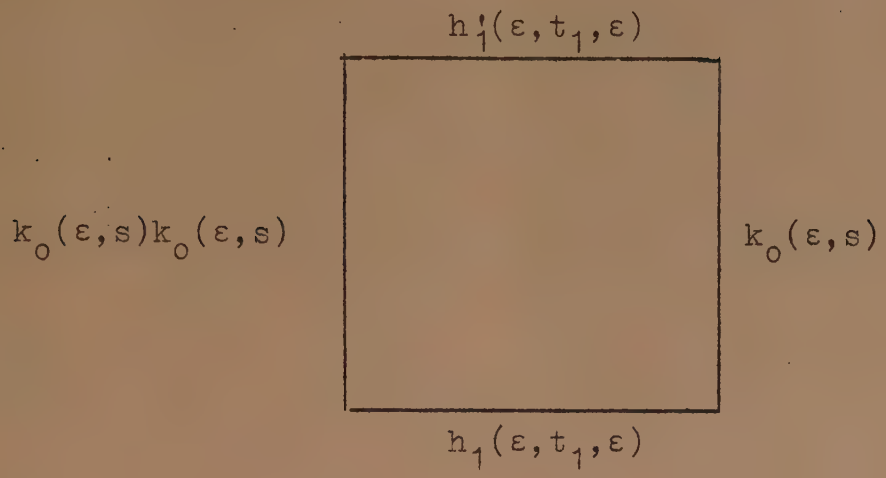
Beweis vom Lemma: Sei ψ: $I \longrightarrow \overline{H}$ eine Abbildung mit $\psi(0) = h_{0}(\varepsilon)$ und $\psi(1) = \overline{\varepsilon}$ derart, daß $\psi(t_{1})h_{0}(\varepsilon)$ mod $\dot{I}$ homotop ist zu $h_{1}(\varepsilon,t_{1},\varepsilon)$. So ein ψ existiert, da die Rechtstranslation mit $h_{0}(\varepsilon)$ Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert. Nach Hilfssatz 2 gibt es eine Abbildung k_{0}: $\check{H}\times I \longrightarrow \overline{H}$ so, daß

$$k_{0}(x,0) = h_{0}(x), \quad k_{0}(\varepsilon,s) = \psi(s), \quad (x\in\check{H},\ s\in I).$$

Wir setzen $k_{0}(x,1) =: h_{0}'(x)$ und ergänzen mit Hilfe von Hilfssatz 1 h_{0}' zu einem H-Homomorphismus h', der zu h H-homotop ist. Die

dabei konstruierte Ergänzung von k_o zu einer H-Homotopie nennen wir k.

$h_1'(\varepsilon,t_1,\varepsilon)$ ist nullhomotop mod $\dot{I}$:



Die Skizze deutet die Konstruktion von $h_1'(\varepsilon,t_1,\varepsilon)$ mit Hilfe von Hilfssatz 1 an. Da die Multiplikation von $\bar{H}$ die Addition in $\pi_1(\bar{H})$ induziert, gilt $[h_1'(\varepsilon,t_1,\varepsilon)] = -[k_o(\varepsilon,s)] - [k_o(\varepsilon,s)h_o(\varepsilon)] + [h_1(\varepsilon,t_1,\varepsilon)] + [k_o(\varepsilon,s)] = 0$ wegen der speziellen Wahl von $k_o(\varepsilon,s) = \psi(s)$. Wir definieren $k_o': \check{H}\times I \longrightarrow \bar{H}$ durch $k_o'(x,s) = h_o'(x)$. Nach Hilfssatz 2 kann k_o' zu einer Teilfolge (k_o',k_1') einer H-Homotopie von $\check{H}\times I$ nach $\bar{H}$ erweitert werden so, daß $k_1'|(\varepsilon\times I\times\varepsilon\times I)$ eine Nullhomotopie von $h_1'|(\varepsilon\times I\times\varepsilon)$ mod $\dot{I}$ ist; nach Hilfssatz 1 wird (k_o',k_1') zu einer vollen H-Homotopie $k': \check{H}\times I \longrightarrow \bar{H}$ fortgesetzt. Das Ergebnis dieser Homotopie, den H-Homomorphismus $k'|(\check{H}\times 1)$, bezeichnen wir wieder mit h. Dann ist $h_o(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}$ und $h_1(\varepsilon,t_1,\varepsilon) = \bar{\varepsilon}$ für alle $t_1\varepsilon$ I.

Annahme: Sei $h: \check{H} \longrightarrow \bar{H}$ ein H-Homomorphismus mit

$$h_i(\varepsilon,t_1,\ldots,t_i,\varepsilon) = \bar{\varepsilon} \text{ für } i = 0,\ldots,2n-1.$$

Behauptung: Es gibt eine H-Homotopie $K: \check{H}\times I \longrightarrow \bar{H}$ mit

1) $K_i(x,s) = K_i(x,0) = h_i(x)$, $\quad i = 0,\ldots,2n-1,$

2) $K_i(x,0) = h_i(x)$, $\quad i = I,1,\ldots$

3) $K_{2n}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n},\varepsilon,1) = K_{2n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n+1},\varepsilon,1) = \bar{\varepsilon}.$

Beweis: $h_{2n+1}|\varepsilon(2n+1)$ induziert in kanonischer Weise eine Abbildung von I^{2n+1} nach $\bar{H}$, da $\varepsilon(2n+1) = \varepsilon \times I \times \varepsilon \times \cdots \times I \times \varepsilon$ mit 2n+1 Faktoren I. Wir wollen einfachheitshalber nicht unterscheiden zwischen $\varepsilon(2n+1)$ und I^{2n+1}.

Das (2n-1)-Gerüst von I^{2n+1} wird bei $h_{2n+1}|\varepsilon(2n+1)$ auf $\bar{\varepsilon}$ abgebildet (vgl. die Vorraussetzung: die Annahme). Bezeichnen wir also die Seiten von I^{2n+1} mit $I_\delta^{2n+1,i}$ $(\delta = 0,1; i=1,\ldots,2n+1)$, so repräsentiert $h_{2n+1}|I_\delta^{2n+1,i}$ ein Element aus $\pi_{2n}(\bar{H})$, das wir mit β_δ^i bezeichnen wollen. Es gilt das Homotopieadditionstheorem

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} \sum_{\delta=0}^{1} (1-)^{i+\delta} \beta_\delta^i = 0.$$

Nun ist aber $\beta_o^i = 0$ für $i = 2,\ldots,2n$, denn β_o^i wird repräsentiert durch $h_{2n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,\varepsilon,t_{i-1},\varepsilon,0,\varepsilon,t_{i+1},\ldots,t_{2n+1},\varepsilon)$ $= h_{i-1}(\varepsilon,t_1,\ldots,\varepsilon,t_{i-1},\varepsilon)h_{2n+1-i}(\varepsilon,t_{i+1},\varepsilon,\ldots,\varepsilon,t_{2n+1},\varepsilon) = \bar{\varepsilon}$, weil $i-1 < 2n$ und $2n+1-i < 2n$. Ferner ist $\beta_o^1 = \beta_o^{2n+1} = \beta_1^i$ für alle $i = 1,\ldots, 2n+1$, denn β_o^1 wird repräsentiert durch $h_{2n}(\varepsilon,t_2,\varepsilon,\ldots,\varepsilon,t_{2n+1},\varepsilon)$, β_o^{2n+1} durch $h_{2n}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n},\varepsilon)$, β_1^i durch $h_{2n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{i-1},\varepsilon,1,\varepsilon,t_{i+1},\ldots,t_{2n+1},\varepsilon) = h_{2n}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{i-1},\varepsilon,t_{i+1},\ldots,t_{2n+1},\varepsilon)$. Also folgt aus (1):

$$0 = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \beta_o^i = -\beta_o^{2n+1},$$

d.h. $h_{2n}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n},\varepsilon)$ ist mod $\dot{I}^{2n}$ homotop zur konstanten Abbildung, die I^{2n} nach $\bar{\varepsilon}$ abbildet. Sei also $k_{2n}: \varepsilon(2n) \times I \longrightarrow \bar{H}$ eine solche Homotopie, also eine Abbildung mit

1) $k_{2n}(\delta\varepsilon(2n) \times I) = \bar{\varepsilon}$,

2) $k_{2n}(x,0) = h_{2n}(x)$ $(x \in \check{H}(n))$, und $k_{2n}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n},\varepsilon,1) = \bar{\varepsilon}$.

Außerdem definieren wir $k_i(x,s) = h_i(x)$ $(i=0,\ldots,2n-1, s \in I, x \in \check{H}(i))$, und setzen k_{2n} fort durch

3) $$\left.\begin{aligned} k_{2n}(x_1,0,x_2,s) &= k_{i-1}(x_1,s)k_{2n-i}(x_2,s) \\ k_{2n}(x_1,1,x_2,s) &= k_{2n-1}(\mu_i^{2n}(x_1,x_2)) \end{aligned}\right\} (x_1,x_2) \in \check{H}(i-1) \times \check{H}(2n-i)$$

Damit ist k_{2n} auf $(\delta\check{H}(2n)\times I)\cup(\check{H}(2n)\times 0)\cup(\varepsilon(2n)\times I)$ definiert und kann nach Hilfssatz 2 auf $\check{H}(2n)\times I$ erweitert werden. (Die Bedingungen 1) und 3) sind miteinander verträglich, da $h_i(\varepsilon,t_1,\ldots,t_i,\varepsilon)=\bar{\varepsilon}$ für $i=0,\ldots,2n-1$ vorausgesetzt ist).

Wir definieren $h'_i(x)=k_i(x,1)$, $i=1,\ldots,2n$, und haben eine $(2n)$-te Teilfolge eines zu h H-homotopen H-Homomorphismus, für den $h'_i(\varepsilon,t_1,\ldots,t_i,\varepsilon)=\bar{\varepsilon}$, $i=1,\ldots,2n$. Wir vervollständigen diese Teilfolge mit Hilfe des Hilfssatzes 1 zu einem H-Homomorphismus h' ; die dabei zu konstruierende Vervollständigung von $(k_i)_{i=0,\ldots,2n}$ bezeichnen wir mit $k=(k_i)_{i=0,1,\ldots}$.

$h'_{2n+1}|\varepsilon(2n+1)$ definiert ein Element aus $\pi_{2n+1}(\bar{H})$, da $h'_{2n+1}|\delta\varepsilon(2n+1)=\bar{\varepsilon}$. Wir ändern h' um eine weitere H-Homotopie ab und definieren

$$l_i(x,s)=h'_i(x), \qquad (i=0,\ldots,2n-1, x\in\check{H}(i)),$$
$$l_i(x,0)=h'_i(x), \qquad (i=0,1,\ldots, x\in\check{H}(i)),$$
$$l_{2n}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n},\varepsilon,s)=h'_{2n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n},\varepsilon,s,\varepsilon).$$

Diese Definitionen sind miteinander verträglich. Durch l_i $(i=0,\ldots,2n-1)$ wird l_{2n} auf $\delta\check{H}(2n)\times I$ festgelegt, wir kennen also l_{2n} auf $(\delta\check{H}(2n)\times I)\cup(\check{H}(2n)\times 0)\cup(\varepsilon(2n)\times I)$ und können es mit Hilfe von Hilfssatz 2 auf $\check{H}(2n)\times I$ erweitern. Für weitere Fortsetzung zu einer vollen H-Homotopie ist l_{2n+1} u.a. auf $(\varepsilon(2n+1)\times 0)\cup(\delta\varepsilon(2n+1)\times I)$ festgelegt $(\varepsilon(2n+1)\times I=I^{2n+2})$. Das 2n-Gerüst des Würfels I^{2n+2} wird durch l_{2n+1} nach $\bar{\varepsilon}$ abgebildet, und wenn wir die durch $l_{2n+1}|I^{2n+2,i}_{\delta}$ $(i=0,\ldots,2n+1,\delta=0,1$ und $i=2n+2,\ \delta=0)$ bestimmten Elemente aus $\pi_{2n+1}(\bar{H})$ mit α^i_δ bezeichnen, ist, da $\alpha^i_0=0$ für $i=2,\ldots,2n+1$ und $\alpha^1_0=\alpha^{2n+2}_0=\alpha^i_1$ für $i=1,\ldots,2n+1$,

$$\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^i(\alpha^i_0-\alpha^i_1)+\alpha^{2n+2}_0=0.$$

(α^i_1,α^1_0 und α^{2n+2}_0 werden alle repräsentiert durch $h'_{2n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n+1},\varepsilon)$). l_{2n+1} kann also derart auf $\varepsilon(2n+1)\times I$ erweitert

werden, daß $l_{2n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,t_{2n+1},\varepsilon,1) = \bar{\varepsilon}$. Nach Hilfssatz 2 kann l_{2n+1} schließlich ganz auf $\overset{\vee}{H}(2n+1)\times I$ erweitert werden. Setzt man $l_i(x,1) = h_i''(x)$ $(x \in \overset{\vee}{H}(i),\ i=0,\ldots,2n+1)$ so hat man eine $(2n+1)$-te Teilfolge eines H-Homomorphismus, die zu einem zu h H-homotopen H-Homomorphismus ergänzt werden kann (Hilfssatz 1) und es gilt

$$h_i''(\varepsilon,t_1,\ldots,t_i,\varepsilon) = \bar{\varepsilon}, \qquad (i=0,\ldots,2n+1).$$

Die H-Homotopie K der Behauptung erhält man durch Hintereinanderschalten der H-Homotopieen k und l.

Für den Rest des Beweises können wir also annehmen, daß wir es stets mit H-Homomorphismen h zu tun haben, für die

$$h_i(\varepsilon,t_1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon,t_i,\varepsilon) = \bar{\varepsilon} \quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

Annahme: Sei $h: \overset{\vee}{H} \longrightarrow \bar{H}$ ein H-Homomorphismus mit

$$h_i(\varepsilon,t_1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon,t_i,\varepsilon) = \bar{\varepsilon}, \qquad (i=0,1,2,\ldots),$$

und

$$h_i(\varepsilon,t_1,\ldots,\varepsilon,t_j,x_j,\ldots,x_i) = h_{i-j}(x_j,\ldots,x_i), \quad (i=0,\ldots,n \text{ und } 1 \leq j \leq i).$$

Ferner sei $h_{n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,\varepsilon,t_j,x_j,\ldots,x_{n+1}) = h_{n-j+1}(x_j,\ldots,x_{n+1})$ für $1+k \leq j \leq n+1$, wobei k eine feste natürliche Zahl zwischen 1 und n+1 ist (Für $k = n+1$ ist dies keine weitere Voraussetzung).

Behauptung: Es gibt eine H-Homotopie $K: \overset{\vee}{H}\times I \longrightarrow \bar{H}$ mit

1) $K_i(x,s) = h_i(x)$, $\qquad i = 0,\ldots,n-1,$

2) $K_i(x,0) = h_i(x)$, $\qquad i = 0,1,\ldots,$

3) für $K_i(x,1) =: h_i'(x)$ gelten für $i = 0,1,\ldots,n+1$ dieselben Beziehungen, wie sie in der Annahme für h_i $(i=0,1,\ldots,n+1)$ formuliert wurden und außerdem gilt noch

$$h_{n+1}'(\varepsilon,t_1,\ldots,\varepsilon,t_k,x_k,\ldots,x_{n+1}) = h_{n+1-k}'(x_k,\ldots,x_{n+1}).$$

Zum Beweis unterscheiden wir zwei Fälle:

1) k ist ungerade:

$h_{n+1}(\varepsilon,t_1,\ldots,\varepsilon,t_k,x_k,t_{k+1},\ldots,x_{n+1})$ induziert eine Abbildung $h^+_{n+1}\colon I^k \longrightarrow \overline{\check{H}}^{(n-k+1)}\left(\underline{\check{H}}^{(n-k+1)}\right.$ habe die Quasitopologie von 4.3). Da $h^+_{n+1}|\dot{I}^k$ für alle $t \in \dot{I}^k$ mit der Abbildung h_{n-k+1} übereinstimmt, repräsentiert h^+_{n+1} ein Element aus $\pi_k(\overline{\check{H}}^{(n-k+1)}, h_{n-k+1})$. Dieses Element ist zwar das Nullelement, aber der Abbildungsraum $\overline{\check{H}}^{(n-k+1)}$ ist für unseren Beweis noch zu groß. Wir definieren daher

$$Y := [\, f\colon \check{H}(n-k+1) \longrightarrow \overline{H} \mid f|\delta\check{H}(n-k+1) = h_{n-k+1}|\delta\check{H}(n-k+1)]$$

und versehen Y auch mit der Quasitopologie. Offenbar gilt $h_{n-k+1} \in Y$. Da nach Induktionsannahme

$$h_{n+1}|\varepsilon(k-1)\times I\times\delta\check{H}(n-k+1) = h_{n-k+1}\,pr_3,$$

(pr_3 sei die Projektion auf den dritten Faktor), gilt: h^+_{n+1} ist eine Abbildung von I^k nach Y und repräsentiert ein Element aus $\pi_k(Y,h_{n+1-k})$.

Auch $h_{n+2}|\varepsilon(k)\times I\times\check{H}(n-k+1)$ induziert wegen des letzten Teils der Induktionsannahme eine Abbildung $h^+_{n+2}\colon I^{k+1} \longrightarrow Y$. Das (k-1)-Gerüst von I^{k+1} wird dabei nach h_{n-k+1} abgebildet. Anwendung des Homotopieadditionstheorems zeigt, daß h^+_{n+1} das Nullelement von $\pi_k(Y,h_{n-k+1})$ repräsentiert. Dabei ist wichtig, daß k+1 eine gerade Zahl ist: die von $h^+_{n+2}|I_1^{k+1,i}$ $(i=1,\ldots,k+1)$ repräsentierten Elemente von $\pi_k(Y,h_{n-k+1})$ heben sich gegenseitig alle auf und $h^+_{n+1} = h^+_{n+2}|I_o^{k+1,1}$ ist als einzige der Abbildungen $h^+_{n+2}|I_o^{k+1,i}$ von der konstanten Abbildung verschieden. Also gibt es ein H-Homotopie K der gesuchten Art: Wir können sogar $K_i(x,s) := h_i(x)$ $(i=0,\ldots,n)$ setzen, da wir ja $K_{n+1}|\varepsilon(k-1)\times I\times\check{H}(n-k+1)\times I$ so wählen können, daß $K^+_{n+1}\colon I^k\times I \longrightarrow Y$ gilt mit

$$K^+_{n+1}|\dot{I}^k\times I \longrightarrow h_{n-k+1} \in Y.$$

2) Ist k gerade, so versagt der Schluß von 1). Wir setzen zunächst

$$K_i(x,s) = h_i(x), \qquad (i=0,\dots,n-1),$$

$$K_n(x_0,t_1,\dots,t_n,x_n,s) = h_{n+1}(\varepsilon,s,x_0,t_1,\dots,t_n,x_n).$$

K_{n+1} ist dann auf $(\check{H}(n+1)\times 0) \cup (\delta\check{H}(n+1)\times I)$ festgelegt und kann nach Hilfssatz 1 auf $\check{H}(n+1)\times I$ erweitert werden. Wir behaupten, daß $K_{n+1}|\varepsilon(k-1)\times I\times\check{H}(n-k+1)\times I$ eine Abbildung $K^+_{n+1}\colon I^{k+1} \longrightarrow Y$ induziert.

Daß durch $K_{n+1}|\varepsilon(k-1)\times I\times\check{H}(n-k+1)\times I$ eine Abbildung von $\check{H}(n-k+1)$ nach $\overline{H}$ induziert wird, ist klar. Wir haben zu zeigen, daß $K^+_{n+1}|\delta\check{H}(n-k+1) = h_{n-k+1}|\delta\check{H}(n-k+1)$:

$$\begin{aligned}
&K^+_{n+1}(t_1,\dots,t_k,s)(x_k,\dots,x_{k+i-1},1,x_{k+i},\dots,x_{n+1}) \qquad (1\le i\le n-k+1)\\
&= K_n(\varepsilon,t_1,\dots,\varepsilon,t_k,x_k,\dots,x_{k+i-1}x_{k+i},\dots,x_{n+1},s)\\
&= h_n(\varepsilon,s,t_1,\dots,\varepsilon,t_k,x_k,\dots,x_{k+i-1}x_{k+i},\dots,x_{n+1})\\
&= h_{n-k}(x_k,\dots,x_{k+i-1}x_{k+i},\dots,x_{n+1})\\
&= h_{n-k+1}(x_k,\dots,x_{k+i-1},1,x_{k+i},\dots,x_{n+1}),
\end{aligned}$$

da die ersten k+1 der x-Koordinaten von h_n gleich ε sind.

$$\begin{aligned}
&K^+_{n+1}(t_1,\dots,t_k,s)(x_k,\dots,x_{k+i-1},0,x_{k+i},\dots,x_{n+1})\\
&= K_{k+i-1}(\varepsilon,t_1,\dots,\varepsilon,t_k,x_k,\dots,x_{k+i-1},s)K_{n-(i+k)+1}(x_{k+i},\dots,x_{n+1},s)\\
&= \begin{cases} h_{k+i-1}(\varepsilon,t_1,\dots,\varepsilon,t_k,x_k,\dots,x_{k+i-1})h_{n-(i+k)+1}(x_{k+i},\dots,x_{n+1}), & 1\le i<n-k+1,\\ h_{n+1}(\varepsilon,s,\varepsilon,t_1,\dots,\varepsilon,t_k,x_k,\dots,x_n)h_0(x_{n+1}), & i=n-k+1,\end{cases}\\
&= h_{n-k+1}(x_k,\dots,x_{k+i-1},0,x_{k+i},\dots,x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Das (k-1)-Gerüst von I^{k+1} wird wieder ganz nach h_{n-k+1} abgebildet, und da k+1 ungerade ist, liefert das Homotopieadditionstheorem, daß das von $K^+_{n+1}|I_1^{k+1,k+1}$ repräsentierte Element von $\pi_k(Y,h_{n-k+1})$ das Nullelement ist. K_{n+1} kann also so gewählt werden, daß $K_{n+1}(\varepsilon,t_1,\dots,\varepsilon,t_k,x_k,\dots,x_{n+1}) = h_{n-k+1}(x_k,\dots,x_{n+1})$, und daraus folgt die Behauptung.

A2) Wir kommen jetzt zu den H-Prinzipalabbildungen $(\phi_{k,m})$:

Zuerst das einfachste Beispiel für H-Prinzipalabbildungen:
Ist $h: H \longrightarrow \overline{H}$ ein H-Homomorphismus und betrachtet man die Produktfaserungen $(H(k)\times I\times H, pr, H(k)\times I)$ und $(\overline{H}, \overline{pr}, \overline{b}_o)$ als Prinzipalfaserungen [die Operation ist im ersten Fall μ_{k+1}^{k+1}], so ist $(h_{k+1}, \overline{b}_o)$ eine Faserabbildung und die Folge $(h_{k+1+m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine H-Prinzipalabbildung zu dieser Faserabbildung und dem H-Homomorphismus h für jedes $k = 0,1,2,\ldots$.

Nun zu $(\phi_{k,m})$, $\phi_{k,m}: E(k)\times I\times H(m-1) \longrightarrow \overline{E}(k)$. Ist $h: H \longrightarrow \overline{H}$ ein H-Homomorphismus, so definierten wir in 5.3 für die abgeschlossese Überdeckung $[U_k^i]_{i=0,1,\ldots,k}$ von E(k) die Abbildungen $\phi_k^i = \phi|U_k^i = \phi_{i-1}|\max(4t_i-1,0)|h_{k-i}$. Zusammen mit $\varphi|p_k(U_k^i)$ bildet ϕ_k^i eine Faserabbildung von $(U_k^i, p_k|U_k^i, p_k(U_k^i), H)$ nach $(\overline{E}(k), \overline{p}_k, \overline{B}(k), \overline{H})$. Man überzeugt sich leicht, daß die Folge

$\phi_{k,m}^i(y,z,x) := \phi_{i-1}(y_1)|\max(4t_i-1,0)|h_{k-i+m}(y_2,t,x)$, eine H-Prinzipalabbildung ist $(m=1,2,\ldots, (y_1,t,y_2) \in y \in U_k^i, t \in I, x \in H(m-1))$.

Auf $U_k^i \cap U_k^j$ ist $\phi_{k,m}^i = \phi_{k,m}^j$, also definieren diese Abbildungen eine H-Prinzipalabbildung $(\phi_{k,m})$ zu (ϕ_k, φ_k) und dem H-Homomorphismus h.

Aus $\phi_k|E(k-1) = \phi_{k-1}$ folgt $\phi_{k,m}|E(k-1)\times I\times H(m-1) = \phi_{k-1,m}$.
Wir lassen daher den Index k i.a. weg, obwohl $\lim_{k\to\infty} \phi_{k,m}$ möglicherweise keine H-Prinzipalabbildung ist.

A3) Behauptung: (B_H, b_o) hat nicht ausgearteten Grundpunkt b_o.

Wir beweisen (vgl. Hilfssatz 14,d) in [7]), daß b_o eine kontrahierbare Umgebung U besitzt und daß es eine Abbildung $u: B_H \longrightarrow I$ gibt mit $u(b_o) = 1$, $u(x) = 0$ für $x \in B_H - U$.

Da B_H induktiver Limes der Folge B(n) ist, können wir U und u induktiv definieren. Sei $U_\delta(1) := t(1)^{-1}(\delta,1]$, $(0 < \delta < 1)$.

$U_\delta(1)$ ist offen in B(1) und kontrahierbar zu b_o:

$$k_1(y\perp t,s) := y\perp(t(1-s) + s), \qquad s \in I, y \in H, t \in (\delta,1],$$

ist eine solche Kontraktion. K_o wird induziert durch

$$K_1(y|t|x,s) := y|t(1-s) + s|x, \quad s \in I,\ y|t|x \in p_1^{-1}(U_\delta(1));$$

ferner definieren wir $u_1(y\perp t) := 1 - \min(\frac{1-t}{1-\delta}, 1)$, $y\perp t \in B(1)$.

Damit ist gezeigt, daß b_o nicht ausgearteter Grundpunkt von B(1) ist.

Wir nehmen nun an, daß $U_\delta(n)$, k_n, K_n und u_n seien so konstruiert, daß $U_\delta(n)$ offen ist in B(n) und $U_\delta(n) \cap B(n-1) = U_\delta(n-1)$, $k_n | U_\delta(n-1) \times I = k_{n-1}$, $K_n | p_{n-1}^{-1}(U_\delta(n-1)) \times I = K_{n-1}$ und $u_n | B(n-1) = u_{n-1}$. Ferner sei $K_n(y|t|x,0) = y|t|x$, $K_n(y|t|x,1) = x_o \cdots x_n$ und $k_n p_n = p K_n$, $(y|t|x \in p_n^{-1}(U_\delta(n)))$. Wir setzen $U_\delta(n+1) := [y\perp t \mid t > \delta,\ y \in p_n^{-1}(U_\delta(n))]$ und definieren

$$K_{n+1}(y|t|x,s) := K_n(y,s)|t(1-s) + s|x, \quad y|t|x \in p_{n+1}^{-1}(U_\delta(n+1)),$$

$$k_{n+1}(y\perp t,s) := K_n(y,s) \perp t(1-s) + s, \quad y\perp t \in U_\delta(n+1),$$

$$u_{n+1}(y\perp t) := 1 - \min(\max(1-u_n(p_n(y)), \tfrac{1-t}{1-\delta}), 1), \quad y\perp t \in B(n+1).$$

Man sieht leicht, daß diese Definitionen den Bedingungen des Induktionsschritts genügen. q.e.d.

LITERATUR.

[1] Bourbaki, N.: Topologie generale, chap. X, Espaces fonctionnels. Paris 1949.

[2] Dold,A.-Lashof,R.: Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles. Illinois J. Math. vol. 3, 285-305 (1959).

[3] Dold,A.-Thom,R.: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. Ann. of Math. vol. 67, 239-281(1958).

[4] Milnor, J.: On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Ann. of Math. vol. 90, 272-280 (1959).

[5] Milnor,J.: Construction of universal bundles I. Ann. of Math. vol. 63, 272 - 284 (1956).

[6] Milnor,J.: Construction of universal bundles II. Ann. of Math. vol. 63, 430 - 436 (1956).

[7] Puppe,D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math. Zeitschr. vol. 69, 299 - 344 (1958).

[8] Samelson,H,: Groups and spaces of loops. Commentarii Math. Helv. vol. 28, 278 - 287 (1954).

[9] Spanier,E.H.-Whitehead,J.H.C.: The theory of carriers and S-theory, Algebraic Geometry and Topology, 330 - 360, Princeton 1957.

[10] Stasheff, J.D.: Homotopy associativity of H-Spaces. Dissertation, Princeton University.

[11] Whitehead,J.H.C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 55, 213 - 245 (1949).

Vita.

Am 5. Juli 1933 wurde ich in Bonn geboren als Sohn des Theologen Lic. Ernst Fuchs und seiner Frau Maria geborene Hoffmann. Von 1939 bis 1943 absolvierte ich die Volksschule in Oberaspach Kreis Schwäbisch Hall (Württemberg), von 1943 bis 1951 besuchte ich die Oberschule für Jungen in Schwäbisch Hall und von 1951 bis 1953 das humanistische Uhlandgymnasium in Tübingen. Mein Abitur legte ich 1953 an dieser Schule ab. Im Sommer 1953 begann ich in Tübingen mit dem Mathematikstudium. Außer in Tübingen studierte ich zwei Semester in Hamburg (1955/56) und ein Jahr in Princeton, New Jersey, (1958). Nach dem Staatsexamen (1959) arbeitete ich zunächst in Tübingen weiter. Seit 1961 bin ich an der Universität des Saarlandes. Meine Dissertation 'Verallgemeinerte Homotopie-Homomorphismen und klassifizierende Räume' fertigte ich unter Leitung von Professor Dr. D. Puppe an.

Martin Fuchs.